85

BAR-ILAN UNIVERSITY
Department of Mathematics
and Computer Science
RAMAT GAN 52900 • ISRAEL
Tel: (972-3) 531-8407 טל

אוניברסיטת בר-אילן
המחלקה למתמטיקה
ולמדעי המחשב
רמת גן 52900 • ישראל
פקס: (972-3) 535-3325 Fax

88200011

16.2.1993

בס"ד

מבחן בלוגיקה (88-200-01)

פרופ' חייב יהודה

1. א. הוכח, כי מספר הבלוקים בכל פסוק בשפת תחשיב פסוקים הוא גדול באחד ממספר הקשרים הלוגיים הבינריים.

ב. נניח שאנו משמיטים את הסוגריים הימניים בכל נוסחה בשפת תחשיב הפסוקים. תן הגדרה אינדוקטיבית של השפה החדשה.

ג. הוכח ש-{ר} אינה שלמה.

2. הגדר:

א. שפה מסדר ראשון, ומודל לשפה מסדר ראשון.

ב. $\mathcal{M}$-טרם, ו-$\tau^{\mathcal{M}}$ (τ $\mathcal{M}$-טרם סגור).

ג. $\mathcal{M} \models \varphi$

3. א. הגדר באופן אידוקטיבי $\{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$, למה כל הוכחה היא סופית?

ב. מי מהבאים נכון, ומדוע?
1. אם $\vdash \varphi \wedge \psi$, אז $\vdash \varphi$ וגם $\vdash \psi$
2. אם $\vdash \varphi \vee \psi$, אז $\vdash \varphi$ או $\vdash \psi$

(אם לא ניתן להוכיח, תן דוגמה נגדית).

ג. הוכח: $\vdash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$

4. א. מה אומר משפט הקומפקטיות ללוגיקה של תחשיב פסוקים?

ב. נסח והוכח את משפט הקומפקטיות עבור שפה מסדר ראשון.

ג. נניח Γ הנקין ושלמה. בנה מודל עבור Γ. הוכח.
(בלי להוכיח שההגדרה לא תלויה בבחירת הנציגים).

57

בס"ד

4.8.1994 למי

מבחן בלוגיקה מתמטית 1 (88-200-04) - פרופ' חיים יהודה

זמן המבחן: 3 שעות.

הנחיות: יש לענות על כל השאלות.

כתוב תשובתך בצורה מלאה, מדוייקת וברורה!

1.א. הוכח ש $\Gamma \Rightarrow \alpha$ אם ורק אם $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ אינה ניתנת לסיפוק.

ב. תהי $\mathcal{L}'$ השפה הפסוקית הרגילה, בתוספת קשר בינארי +, שפירושו "α או β, אך לא שניהם" (exclusive or), ובתוספת שני בלוקים 0,1 כך שלכל השמת אמת S, $\bar{S}(1)=T$ ו $\bar{S}(0)=F$.

(1) הגדר את $\mathcal{L}'$ באינדוקציה, ושנה את הגדרת ההרחבה $\bar{S}$ בהתאם.

(2) הראה ש $\alpha+\beta \Leftrightarrow \beta+\alpha$.

(3) הגדר באינדוקציה פונקציה $f(\alpha)$ הסופרת את הסימנים ב α שהם (,+,¬ או בלוק.

2. א. יהי $\mathcal{M}$ מודל עבור שפה מסדר ראשון $\mathcal{L}$.

(1) הגדר "$\mathcal{M}$-עצם" ($\mathcal{M}$-term) באינדוקציה.

(2) יהיו x,y משתנים שונים, ויהי τ $\mathcal{M}$-עצם. הוכח:

$\tau(x|y)(y|x)=\tau$ אם ורק אם $y \notin Var(\tau)$.

ב. תהי φ הנוסחה $\forall x\exists xRxyz \rightarrow \neg\forall yRxxx$. חשב את $\varphi(x|y),\ Fr(\varphi),\ Bd(\varphi)$.

ג. הוכח שהנוסחה $(\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \exists x\varphi) \rightarrow \exists x\psi$ היא נכונה.

3. א. הגדר $\Gamma \vdash \varphi$.

ב. הוכח או הפרך:

(1) $\vdash \forall x\varphi \vee \forall x\psi \rightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$

(2) $\vdash \forall x(\varphi \vee \psi) \rightarrow \forall x\varphi \vee \forall x\psi$

ג. מצא נוסחה בצורה תחילית נורמלית (prenex normal form) השקולה לנוסחה הבאה:

$$\exists xRxy \rightarrow (Px \rightarrow \exists uRxu)$$

בהצלחה!

85

מבחן בלוגיקה מתמטית – מועד א'

מרצה: בועז צבאן.

משך הבחינה: שעתיים.

הנחיות: הבחינה היא ללא חומר עזר.
יש לענות על שלוש שאלות בדיוק מתוך ארבע השאלות הבאות.
התשובות חייבות להיות תמציתיות, מדוייקות וברורות (לא תתקבל הוכחת סעיף בשאלה שאורכת יותר מעמוד אחד).
נא להתחיל כל שאלה בעמוד חדש, ולציין בבירור את מספר השאלה ומספר הסעיף בשאלה.

שאלה 1. תהי Φ קבוצת פסוקים בשפת תחשיב הפסוקים.

א. (5 נקודות) הוכח שאם Φ ניתנת לסיפוק, אז כל תת-קבוצה סופית של Φ ניתנת לסיפוק.

ב. (20 נקודות) הוכח את הכיוון השני של משפט הקומפקטיות עבור לוגיקת תחשיב הפסוקים: אם כל תת קבוצה סופית של Φ ניתנת לסיפוק, אז Φ ניתנת לסיפוק.

ג. (10 נקודות) נתון שניתן לצבוע כל מפה סופית בארבע צבעים. הסבר בקצרה כיצד ניתן להשתמש במשפט הקומפקטיות כדי להוכיח שניתן לצבוע כל מפה אינסופית בארבע צבעים.

שאלה 2.

א. תהי $\varphi(\mathrm{u}, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{n})$ נוסחה בשפה $\mathcal{L}$ עם משתנים חפשיים $\mathrm{u}, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{n}$ ויהיו x, y שני משתנים שאינם מופיעים ב φ. הוכח או הפרך את נכונות כל אחת מהנוסחאות הבאות, כאשר F סמל פונקציה ב $\mathcal{L}$:

1. (10 נקודות) $\forall \mathrm{u}\varphi(\mathrm{u}, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{n}) \rightarrow \forall \mathrm{x}\forall \mathrm{y}\varphi(\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{n})$.

2. (10 נקודות) $\exists \mathrm{u}\varphi(\mathrm{u}, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{n}) \rightarrow \exists \mathrm{x}\exists \mathrm{y}\varphi(\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{n})$.

ב. (5 נקודות) הוכח שהקבוצה $\emptyset$ גדירה בכל מודל.

ג. (10 נקודות) הוכח שלכל n טבעי, הקבוצה M^n גדירה בכל מודל (M^0 מוגדרת להיות $\emptyset$).

שאלה 3.

א. אילו מהטענות הבאות נכונות לכל φ, ψ ? הוכח!

1. (5 נקודות) אם $\vdash \varphi \wedge \psi$, אזי $\vdash \varphi$ וכן $\vdash \psi$.

2. (10 נקודות) אם $\vdash \varphi \vee \psi$, אזי $\vdash \varphi$ או $\vdash \psi$.

ב. (20 נקודות) תן הוכחה פורמאלית של הנוסחה הבאה: $\forall \mathrm{x}(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall \mathrm{x}\varphi \wedge \forall \mathrm{x}\psi)$.

שאלה 4. תהא $\mathcal{L}$ השפה של הלוגיקה מסדר ראשון. תהא $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ תיאוריה עקבית.

א. (5 נקודות) **הגדר:**

1. Γ היא תיאוריה שלמה.
2. Γ היא תיאורית הנקין.
3. Γ^* היא הרחבה פשוטה של Γ.

ב. (10 נקודות) **הוכח** שקיימת תיאוריה עקבית ושלמה $\Gamma^* \subseteq \mathcal{L}$ המרחיבה את Γ, כך שה-הרחבה היא פשוטה.

ג. (10 נקודות) **הוכח** שקיימת תיאורית הנקין עקבית Γ^* המרחיבה את Γ.

ד. (10 נקודות) **הוכח**, בעזרת הסעיפים הקודמים, שקיימת תיאורית הנקין עקבית ושלמה Γ^* המרחיבה את Γ.

בהצלחה!

N85

מבחן בלוגיקה מתמטית (03-200-88) – מועד ב'

מרצה: בועז צבאן.

תאריך: יום ראשון, י״א ניסן ה׳תשס״ג (13/4/03 למ׳).

משך הבחינה: שעתיים (לא תינתן הארכה).

הנחיות: הבחינה היא ללא חומר עזר. יש לענות על השאלות בדיוק, בצורה מלאה וברורה ככל האפשר. נא להתחיל כל שאלה בעמוד חדש, ולציין בבירור את מספר השאלה ומספר הסעיף בשאלה.

חלק ראשון: לוגיקת תחשיב הפסוקים

ענה על *שאלה אחת בדיוק* מבין שתי השאלות הבאות.

שאלה 1.

א. הוכח: אם $\beta \Rightarrow \gamma$, ו $\mathrm{BKS}(\beta) \cap \mathrm{BKS}(\gamma) = \emptyset$, אז לפחות אחד מהשניים $\neg\beta$ ו γ הוא טאוטולוגיה.

ב. הוכח את משפט השירבוב עבור לוגיקה פסוקית: נניח ש $\beta \Rightarrow \gamma$ וכן

$$\mathrm{BKS}(\beta) \cap \mathrm{BKS}(\gamma) = \{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\}$$

כאשר $m > 0$.

1. נניח שאין m־פיסקאות ε כך ש $\beta \Rightarrow \varepsilon$. הוכח ש γ טאוטולוגיה.

2. הוכח שבכל מקרה (גם אם (1) לא מתקיים), יש פסוק α כך ש $\mathrm{BKS}(\alpha) \subseteq \{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\}$ ומתקיים $\beta \Rightarrow \alpha \Rightarrow \gamma$.

שאלה 2.

תהי Φ קבוצת פסוקים בשפת תחשיב הפסוקים.

א. הוכח שאם Φ ניתנת לסיפוק, אז כל תת־קבוצה סופית של Φ ניתנת לסיפוק.

ב. תאר את השלבים העיקריים בהוכחת הכיוון השני של משפט הקומפקטיות עבור לוגיקת תחשיב הפסוקים: אם כל תת קבוצה סופית של Φ ניתנת לסיפוק, אז Φ ניתנת לסיפוק.

ג. נתון שכל סדר חלקי על קבוצה סופית ניתן להרחיב לסדר שלם על אותה הקבוצה. הסבר כיצד ניתן להשתמש במשפט הקומפקטיות כדי להוכיח שאם $\prec$ סדר חלקי על קבוצה בת מניה X, אזי $\prec$ ניתן להרחבה לסדר שלם על X.

חלק שני: מודלים ונכונות
ענה על השאלה הבאה.

שאלה 3.
א. הוכח שאם $\Gamma \cup \{\varphi\}$ היא קבוצה של נוסחאות סגורות, ו ψ נוסחה כלשהי, אז

$$\Gamma \models \varphi \to \psi \quad \text{אם ורק אם} \quad \Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$$

ב. הוכח שאם $\varphi_1 \mathrel{=\!\mid\models} \psi_1$ ו $\varphi_2 \mathrel{=\!\mid\models} \psi_2$, אז $\forall x\, \psi_1 \mathrel{=\!\mid\models} \forall x\, \varphi_1$, וכן $\exists x\, \psi_1 \mathrel{=\!\mid\models} \exists x\, \varphi_1$.

חלק שלישי: תורת ההוכחות ומשפט השלמות
ענה על *שאלה אחת בדיוק* מבין שתי השאלות הבאות.

שאלה 4.
א. אילו מהטענות הבאות נכונות לכל φ, ψ ? הסבר!

1. אם $\vdash \varphi \wedge \psi$, אזי $\vdash \varphi$ וכן $\vdash \psi$.
2. אם $\vdash \varphi \vee \psi$, אזי $\vdash \varphi$ או $\vdash \psi$.

ב. הוכח או הפרך (מותר להשתמש במשפט ההכללה, במשפט הדדוקציה, וכולי):

$$\vdash (\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \to \forall x (\varphi \vee \psi)$$

שאלה 5.
א. תהי Γ תיאוריה שלמה והנקין. הסבר כיצד ניתן לבנות מודל עבור Γ. היכן השתמשת בשלמות של Γ? היכן השתמשת בכך ש Γ היא הנקין?
ב. נסח את משפט השלמות וסקור את השלבים העיקריים בהוכחתו.

בהצלחה!

מבחן בלוגיקה מתמטית (03-200-88) – מועד א׳

מרצה: בועז צבאן.

תאריך: יום שני, כ״ד שבט ה׳תשס״ג (27/1/03 למי).

משך הבחינה: שעתיים (לא תינתן הארכה).

הנחיות: הבחינה היא ללא חומר עזר. יש לענות על השאלות בדיוק, בצורה מלאה וברורה ככל האפשר. נא להתחיל כל שאלה בעמוד חדש, ולציין בבירור את מספר השאלה ומספר הסעיף בשאלה.

חלק ראשון: לוגיקת תחשיב הפסוקים

ענה על *שאלה אחת בדיוק* מבין שתי השאלות הבאות.

שאלה 1.

עבור השמת אמת S על $\{\mathtt{A}_1,\ldots,\mathtt{A}_n\}$, נגדיר את ה n־פיסקה δ_S להיות

$$\delta_S := \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n$$

כאשר עבור $i=1,\ldots,n$,

$$\beta_i := \begin{cases} \mathtt{A}_i & \text{אם } S(\mathtt{A}_i)=F \\ \neg\mathtt{A}_i & \text{אם } S(\mathtt{A}_i)=T \end{cases}$$

א. הוכח את הטענות הבאות:

1. $\bar{S}(\delta_S)=F$.
2. לכל n־פיסקה α השונה מ δ_S, $\bar{S}(\alpha)=T$.
3. לכל השמת אמת S' על $\{\mathtt{A}_1,\ldots,\mathtt{A}_n\}$ כך ש $S'\neq S$, $\bar{S'}(\delta_S)=T$.

ב. יהי α טאוטולוגיה. הוכח שאין פסוק α' בצורה קוניונקטיבית נורמלית כך ש $\alpha'\Leftrightarrow\alpha$.

ג. הוכח: לכל פסוק α שאינו טאוטולוגיה, יש פסוק α' בצורה קוניונקטיבית נורמלית כך ש $\alpha'\Leftrightarrow\alpha$.

שאלה 2.

תהי Φ קבוצת פסוקים בשפת תחשיב הפסוקים.

א. הוכח שאם Φ ניתנת לסיפוק, אז כל תת־קבוצה סופית של Φ ניתנת לסיפוק.

ב. תאר את השלבים העיקריים בהוכחת הכיוון השני של משפט הקומפקטיות עבור לוגיקת תחשיב הפסוקים: אם כל תת קבוצה סופית של Φ ניתנת לסיפוק, אז Φ ניתנת לסיפוק.

ג. נתון שניתן לצבוע כל מפה סופית בארבע צבעים. הסבר כיצד ניתן להשתמש במשפט הקומפקטיות כדי להוכיח שניתן לצבוע כל מפה אינסופית בארבע צבעים.

חלק שני: מודלים ונכונות

ענה על השאלה הבאה.

שאלה 3.

א. יהיו φ ו ψ $\mathcal{M}$-נוסחאות (לאו דווקא סגורות!). הוכח:

אם $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ ו $\mathcal{M} \models \varphi$, אז $\mathcal{M} \models \psi$

ב. יהי $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$. הוכח שהקבוצה $Q_0 = \{0\}$ גדירה ב $\mathcal{Z}$, ואילו הקבוצה $Q_1 = \{1\}$ אינה גדירה ב $\mathcal{Z}$ (רמז: מצא איזומורפיזם של המודל $\mathcal{Z}$).

חלק שלישי: תורת ההוכחות ומשפט השלמות

ענה על *שאלה אחת בדיוק* מבין שתי השאלות הבאות.

שאלה 4.

א. יהי Γ אוסף של נוסחאות מסדר ראשון. הוכח: $\Gamma \vdash \varphi$ אם ורק אם $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ אינה עקבית.

ב. תן הוכחה פורמאלית מלאה של הנוסחה

$$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$$

כאשר x אינו חפשי ב φ.

שאלה 5.

א. הוכח שלכל תיאוריה עקבית $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ יש תיאוריה עקבית ושלמה $\Gamma^* \subseteq \mathcal{L}$ המרחיבה את Γ.

ב. הוכח שהטענות הבאות שקולות:

1. תאוריה Γ היא עקבית אם ורק אם יש לה מודל.
2. לכל תאוריה Γ ונוסחה φ, $\Gamma \vdash \varphi$ אם ורק אם $\Gamma \models \varphi$.

בהצלחה!

86

מבחן בלוגיקה מתמטית – מועד ב'

מרצה: בועז צבאן.

משך הבחינה: שעתיים.

הנחיות: הבחינה היא ללא חומר עזר.
יש לענות על שלוש שאלות בדיוק מתוך ארבע השאלות הבאות.
התשובות חייבות להיות תמציתיות, מדוייקות וברורות (לא תתקבל הוכחת סעיף בשאלה שאורכת יותר מעמוד אחד).
נא להתחיל כל שאלה בעמוד חדש, ולציין בבירור את מספר השאלה ומספר הסעיף בשאלה.

שאלה 1.

א. (5 נקודות) נסח את משפט הקומפקטיות עבור לוגיקת תחשיב הפסוקים.

ב. (25 נקודות) נתון שכל סדר חלקי על קבוצה סופית ניתן להרחיב לסדר שלם על אותה הקבוצה. הוכח שאם $\succ$ סדר חלקי על קבוצה בת מניה X, אזי $\succ$ ניתן להרחבה לסדר שלם על X.

שאלה 2.

א. בשפה שבה אך ורק סמל יחס אונארי יחיד, מצא:

1. (10 נקודות) נוסחאות φ, ψ כך שלא מתקיים $\forall u(\varphi \vee \psi) \;=\!\!|\!\!\models \forall u\varphi \vee \forall u\psi$.

2. (10 נקודות) נוסחאות φ, ψ כך שלא מתקיים $\exists u(\varphi \wedge \psi) \;=\!\!|\!\!\models \exists u\varphi \wedge \exists u\psi$.

הוכח את טענותיך.

ב. (15 נקודות) מצא נוסחה המגדירה את $\{0\}$ במודל $\mathcal{M} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}} \rangle$.

שים לב: אין בשפה סמל קבוע עבור 0.

שאלה 3. הוכח או הפרך (מותר לך להשתמש במשפט ההכללה, במשפט הדדוקציה, וכולי):

א. (20 נקודות) $\vdash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$.

ב. (15 נקודות) $\vdash (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

שאלה 4. (35 נקודות) תהא $\mathcal{L}$ השפה של הלוגיקה מסדר ראשון, ותהא $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ תיאוריה שלמה והנקין. הוכח שקיים מודל עבור Γ.

היכן השתמשת בשלמות של Γ? היכן השתמשת בכך ש Γ היא הנקין?

בהצלחה!

86

מבחן בלוגיקה מתמטית – מועד ב'

מרצה: בועז צבאן.

משך הבחינה: שעתיים.

הנחיות: הבחינה היא ללא חומר עזר.
יש לענות על שלוש שאלות בדיוק מתוך ארבע השאלות הבאות.
התשובות חייבות להיות תמציתיות, מדוייקות וברורות (לא תתקבל הוכחת סעיף בשאלה שאורכת יותר מעמוד אחד).
נא להתחיל כל שאלה בעמוד חדש, ולציין בבירור את מספר השאלה ומספר הסעיף בשאלה.

שאלה 1.

א. (5 נקודות) נסח את משפט הקומפקטיות עבור לוגיקת תחשיב הפסוקים.

ב. (25 נקודות) נתון שכל סדר חלקי על קבוצה סופית ניתן להרחיב לסדר שלם על אותה הקבוצה. הוכח שאם $\prec$ סדר חלקי על קבוצה בת מניה X, אזי $\prec$ ניתן להרחבה לסדר שלם על X.

שאלה 2.

א. בשפה שבה אך ורק סמל יחס אונארי יחיד, מצא:

1. (10 נקודות) נוסחאות φ, ψ כך שלא מתקיים $\forall u\varphi \vee \forall u\psi \models\!\!\dashv \forall u(\varphi \vee \psi)$.

2. (10 נקודות) נוסחאות φ, ψ כך שלא מתקיים $\exists u\varphi \wedge \exists u\psi \models\!\!\dashv \exists u(\varphi \wedge \psi)$.

הוכח את טענותיך.

ב. (15 נקודות) מצא נוסחה המגדירה את $\{0\}$ במודל $\mathcal{M} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}} \rangle$.

שים לב: אין בשפה סמל קבוע עבור 0.

שאלה 3.
הוכח או הפרך (מותר לך להשתמש במשפט ההכללה, במשפט הדדוקציה, וכולי):

א. (20 נקודות) $\vdash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$.

ב. (15 נקודות) $\vdash (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

שאלה 4.
(35 נקודות) תהא $\mathcal{L}$ השפה של הלוגיקה מסדר ראשון, ותהא $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ תיאוריה שלמה והנקין. הוכח שקיים מודל עבור Γ.

היכן השתמשת בשלמות של Γ? היכן השתמשת בכך ש Γ היא הנקין?

בהצלחה!

2(0)

יום ג, 18.10.94 י"ג

בס"ד

מבחן בלוגיקה מתמטית 1 (04 – 200 – 88) - פרופ' חיים יהודה

מועד מיוחד

זמן המבחן: שלש שעות.

הנחיות: יש לענות על כל השאלות. כתוב תשובתך בצורה מלאה, מדוייקת וברורה!

1. א. הגדר "$C(B,K)$ מקיים קריאות יחידה".

ב. יהיו $B=\{00,01,10,11\}$; $K=\{F_{00},F_{01},F_{10},F_{11}\}$, כאשר $F_{i_1i_2}(x)=xi_1i_2$ עבור $i_1,i_2\in\{0,1\}$ (שירשור).

תהי S קבוצת כל הסדרות **מאורך זוגי** של 0-ים ו 1-ים.

(1) הוכח ש $C(B,K)=S$ (מותר להשתמש באינדוקציה על אורך הסידרה).

(2) האם המבנה מקיים קריאות יחידה? הוכח!

2. א. נסח את משפט הקומפקטיות עבור לוגיקה פסוקית (Sentential language).

ב. תן סקירה כללית (בקיצור נמרץ) של הוכחת המשפט.

ג. היעזר במשפט זה כדי להוכיח את הטענה הבאה:

אם $\Gamma\Rightarrow\alpha$ אז יש תת קבוצה סופית $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ כך ש $\Gamma_0\Rightarrow\alpha$.

(רמז: $\Gamma\Rightarrow\alpha$ אם ורק אם $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}$ אינה ניתנת לסיפוק).

ד. נתון כי $\alpha\Leftrightarrow\beta$. הוכח שיש $\gamma\in\mathcal{L}$ כך ש $BKS(\gamma)\subseteq BKS(\alpha)\cap BKS(\beta)$ ומתקיים $\gamma\Leftrightarrow\alpha$

3. א. תהי φ הנוסחה

$$\exists xRxy\to(Px\to\neg\forall y(Rxy\vee Py))$$

חשב $\varphi(x|x+y)$, $Bd(\varphi)$, $Var(\varphi)$.

ב. מצא נוסחה בצורה תחילית נורמלית (pnf) השקולה ($\dashv\vdash$) ל φ (הראה את הדרך, אך אין צורך לנמק את השלבים).

4. א. יהיו x,y משתנים שונים.

(1) האם הנוסחה $\forall xPx\to\forall yPy$ היא נכונה? הוכח.

(2) האם היא טאוטולוגיה? הוכח.

ב. הוכח שאם $\Gamma\cup\varphi\vdash\psi$, אזי $\Gamma\vdash\varphi\to\psi$ (רמז: אינדוקציה על הוכחת ψ מתוך $\Gamma\cup\{\varphi\}$. הוכחה אחרת לא תתקבל).

ג. (1) הוכח או הפרך: $\vdash\forall x(\varphi\to\psi)\to(\forall x\varphi\to\psi)$.

(2) נתון $x\notin Fr(\varphi)$. הוכח או הפרך: $\vdash\forall x(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\forall x\psi)$.

בהצלחה!

31.1.89

61

88-372-01 בחינה בלוגיקה מתמטית

סימסטר א', מועד א'

זמן הבחינה: שעתיים.

נא לענות על שלוש מתוך 5 השאלות הבאות.

1. להגדיר או לנסח:

א) הגדרה של שפה פסוקית.

ב) מודל לשפה פסוקית L.

ג) מודל של קבוצת נוסחאות Γ בשפה L.

ד) משפט הקומפקטיות.

2. נתונה השפה פסוקית L עם קבוצת האטומים A ועם הקשרים $\vee, \wedge, \sim$ (בלבד). נגדיר לכל נוסחה φ את הנוסחה הדואלית $\tilde{\varphi}$ כדלקמן:

$$\tilde{p} = p \quad (p \in A).$$
$$\widetilde{\sim\varphi} = \sim\tilde{\varphi},$$
$$\widetilde{\varphi \wedge \psi} = \tilde{\varphi} \vee \tilde{\psi},$$
$$\widetilde{\varphi \vee \psi} = \tilde{\varphi} \wedge \tilde{\psi}.$$

לכל מודל μ לשפה L נסמן ב- $\tilde{\mu}$ את המודל המקיים $\tilde{\mu}(p) = 1 - \mu(p)$ לכל אטום p. [תזכורת: F=0; T=1.]

א) הוכח שלכל נוסחה φ ומודל μ:

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\tilde{\mu}} = \|\sim\varphi\|_{\mu}.$$

ב) הסק מכאן שאם φ, ψ נוסחאות שקולות לוגית בשפה L אז גם $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ שקולות לוגית.

3. תהי $G:\{F,T\}^3 \to \{F,T\}$ פונקציית האמת המוגדרת כך: $G(T,x,y) = x$, $G(F,x,y) = y$

(לכל שני ערכי אמת x, y). נתונה השפה הפסוקית L

עם מנייה כלשהי של אטומים ועם הקשרים $f, t, !, c$

ט
62

[רמז לחלק (ב): הסבר במודל שבו כל האטומים אמיתיים או כולם שקריים.]

4. מצאו נוסחה פשוטה ביותר בצורה דיסיונקטיבית השקולה לוגית לנוסחה

$$\sim((p \to q) \wedge (q \to r)).$$

יש להוכיח שהנוסחה שמצאתם היא מינימלית הן מבחינת מספר הדיסיונקטים שלה והן מבחינת מספר הקוניונקטים בכל דיסיונקט.

5. לנמק בקצרה או להפריך ע"י דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות:

א) אם L שפה פסוקית בעלת מספר סופי של אטומים, Γ קבוצת נוסחאות של L אז קיימת נוסחה φ בשפה L שהתוצאות הלוגיות שלה (ב-L) הן בדיוק התוצאות הלוגיות של Γ.

ב) כמו (א), בהשמטת ההנחה שמספר האטומים של L הוא סופי.

ג) אם A קבוצה סופית, R יחס סדר-חלקי על A ו-a איבר R-מינימלי של A (כלומר, לא קיים x ב-A כך ש- xRa) אז יש סידור לינארי של A המרחיב את R ושבו a איבר ראשון.

ד) כמו (ג), בהשמטת ההנחה שהקבוצה A סופית.

בהצלחה

1

1. לכל אחת מהנוסחאות הבאות קבע אם הנוסחה:
א) טאוטולוגיה ב) סתירה ג) אף אחת מהן

i. $[P\to(P\to Q)]\to(P\to Q)$ ii. $P\to(\neg P\to Q)$ iii. $\neg R\to(P\wedge\neg P)$

2. השתמש בשיטת DAVIS-PUTNAM כדי להוכיח שהטענה הבאה נכונה:

$$P\to Q,\ R\vee\neg Q,\ \neg(P\wedge R)\models\neg P$$

השלם את משפט HERBRAND: הפסוק האוניברסלי

$\forall b_1\forall b_2\ldots\forall b_n\,\alpha(b_1,\ldots,b_n)$ ניתן לסיפוק אם ורק אם ______

התבונן בטענה $\forall x\exists y\,p(x,y)\models\exists y\forall x\,p(x,y)$.

. הטענה נכונה אם ורק אם הפסוק $\alpha = ?$ ______ אינו ניתן לסיפוק

מצא את הסקולמיזציה של α והעבר אותו לצורה פסוקית β

ג. אם β אינו ניתן לסיפוק הראה הוכחת רזולוציה

ד. אם β ניתן לסיפוק מצא מודל לצד שמאל של הטענה המקורית שאינו מודל לצד ימין של הטענה.

5. כמו שאלה 4 עבור הטענה $\exists y\forall x\,p(x,y)\models\forall x\exists y\,p(x,y)$

1

לוגיקה 88-200 תשנ"ו סמ' א מועד ב' ד"ר משה קופל

1. לכל אחת מהנוסחאות הבאות קבע אם הנוסחה:
א) טאוטולוגיה ב) סתירה ג) אף אחת מהן

i. $[P \to (P \to Q)] \to (P \to Q)$ ii. $P \to (\neg P \to Q)$ iii. $\neg R \to (P \wedge \neg P)$

2. השתמש בשיטת DAVIS-PUTNAM כדי להוכיח שהטענה הבאה נכונה:

$$P \to Q,\ R \vee \neg Q,\ \neg(P \wedge R) \models \neg P$$

השלם את משפט HERBRAND: הפסוק האוניברסלי $\forall b_1 \forall b_2 \ldots \forall b_n\, \alpha(b_1,\ldots,b_n)$ ניתן לסיפוק אם ורק אם ______.

התבונן בטענה $\forall x \exists y\, p(x,y) \models \exists y \forall x\, p(x,y)$.

א. הטענה נכונה אם ורק אם הפסוק $\alpha = ?$ אינו ניתן לסיפוק.

ב. מצא את הסקולמיזציה של α והעבר אותו לצורה פסוקית, β.

ג. אם β אינו ניתן לסיפוק הראה הוכחת רזולוציה.

ד. אם β ניתן לסיפוק מצא מודל לצד שמאל של הטענה המקורית שאינו מודל לצד ימין של הטענה.

כמו שאלה 4 עבור הטענה $\exists y \forall x\, p(x,y) \models \forall x \exists y\, p(x,y)$

2

29.6.88

בחינה [redacted]

זמן הבחינה: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר (ספרים, מחברות וכו').
יש לענות על שלוש מחמש השאלות הבאות.

1. א) מצא נוסחה בצורה פרנכסית נורמלית השקולה לוגית לנוסחה הבאה:

$$\forall v_1 (v_1 < v_2 \rightarrow v_1 < v_3) \longleftrightarrow \sim (v_3 < v_2).$$

ב) קבע אם הנוסחה הבאה תקפה לוגית. התשובה צריכה להיות מנומקת.

$$(v_1 = v_3 \vee v_1 = v_4) \wedge (v_2 = v_3 \vee v_2 = v_4) \wedge v_1 \neq v_2$$
$$\rightarrow v_1 \cdot (1 + v_2) = v_3 \cdot (1 + v_4).$$

2. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות. בכל סעיף יש לנמק בקצרה או להביא דוגמה נגדית. [מדובר בנוסחאות של השפה מסדר ראשון L עם הסמלים הלא-לוגיים $0, 1, -, +, \cdot, <$ ובמודלים לשפה זו.]

א) כל נוסחה שקולה לוגית לפסוק.

ב) כל נוסחה שקולה לוגית לנוסחה שבה שום משתנה אינו חופשי וגם קשור.

ג) כל שני מודלים שקולים אלמנטרית הם איזומורפיים.

ד) כל שני מודלים שקולים אלמנטרית בני מניה הם איזומורפיים.

3. תהי L_0 השפה מסדר ראשון בלי סמלים לא לוגיים (הנוסחאות האטומיות היחידות של L_0 הן מהצורה $x=y$ כש- x, y משתנים). מודל $\mathfrak{M}$ לשפה L_0 נקבע לחלוטין ע"י קבוצה לא ריקה M שהיא קבוצת האברים שלו, ונכתב $\mathfrak{M} = \langle M \rangle$.

א) הראה שכל שני מודלים אינסופיים לשפה L_0 הם שקולים

[illegible]

3

[רמז: שימוש במשפטי לוונהיים – סקולם. מה אפשר לומר על
שני מודלים לשפה L_0 שהם בעלי אותה עוצמה?]

ב) להראות שלא קיים פסוק A בשפה L_0 שאמיתי בכל מודל
סופי בעל מספר זוגי של איברים ושקרי בכל מודל סופי
בעל מספר אי-זוגי של איברים.
[רמז: מעבר למודלים אינסופיים בעזרת משפט הקומפקטיות.]

4. תהי L_1 השפה מסדר ראשון עם הסמלים הלא לוגיים
$+, 0, -$ ("שפת החבורות האבליות").

א) האם קיים פסוק של L_1 אשר המודלים שלו הם בדיוק
החבורות האבליות (קומוטטיביות, חילופיות) שיש להן אבר מסדר 2?
אם לא, האם קיימת קבוצת פסוקים של L_1 אשר אלה בדיוק
המודלים שלה?

ב) אותה שאלה על חבורות ציקליות (במקום "חבורות אבליות
שיש להן אבר מסדר 2").

ג) אותה שאלה על חבורות אבליות אינסופיות.

5. בהרצאה הגדרנו את $s[t/x]$, $A[t/x]$ ("תוצאת
ההצבה של הביטוי t עבור המשתנה x בביטוי s או בנוסחה A")
באינדוקציה על המבנה של s ושל A כאשר t היה ביטוי
סגור (ביטוי ללא משתנים), ולמקרה זה הוכחנו את למת ההצבה
המאפשרת לקבוע את ערך האמת של $A[t/x]$ בהשמה מסוימת
על פי ערך האמת של A בהשמה אחרת לאותו מודל.
כעת ~~[illegible]~~ נכליל ההגדרת $A[t/x]$ את בסעיף המכלל באפשרות
ש-A מהצורה $\exists y B$ כש-y משתנה שונה מ-x. במקרה זה,
אם y אינו מופיע ב-t תהי $A[t/x]$ הנוסחה $\exists y B[t/x]$;
ואם y מופיע ב-t יהי z המשתנה הראשון שאינו חופשי ב-B, שונה
מ-x ואינו מופיע ב-t ותהי $B' = B[z/y]$ ואז $A[t/x]$ תהיה
הנוסחה $\exists z B'[t/x]$.

הראה כיצד ניתן לומר שינוי זה בהגדרה, לנסח ולהוכיח את למת
ההצבה עם t ביטוי כלשהו (לאו דווקא סגור).

בהצלחה

לוגיקה מתמטית 1 - 88-200-07 - מועד א' תשס"ה

המרצה: פרופ' אמיר

משך הבחינה: שעתיים

מותר להעזר במחברות

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

(15 נק') 1. הראה אם הנוסחה הבאה טאוטולוגיה או לא.

$$(((A\wedge B)\supset C)\vee(C\vee\sim B\vee\sim A))\supset(((((A\supset B)\wedge B)\supset A)\vee\sim D)\supset B)$$

(15 נק') 2. ענה רק אמת או שקר. (כל שאלה שווה 3 נקודות).

א. אם A ניתנת למניה רקורסיבית אז A כריעה.
ב. אם A כריעה אז A ניתנת למניה רקורסיבית.
ג. אם A כריעה אז $\bar{A}$ כריעה.
ד. אם A ניתנת למניה רקורסיבית אז $\bar{A}$ ניתנת למניה רקורסיבית.
ה. אם A ניתנת למניה רקורסיבית ; $\bar{A}$ ניתנת למניה רקורסיבית אז A כריעה.

(5 נק') 3. מה המשתנים החופשיים של הנוסחה $(\forall x\forall y(\forall z\, A(x,y,z))\supset B(x,y,z))$

(5 נק') 4. האם $f(a_1,a_2,x_1,x_2)$ חופשי ל- x_3 בנוסחה הבאה:

$$(\forall x_3\forall x_1(A(x_3,a_1)))\vee(B(x_1,x_2)\supset\forall x_3\, C(x_2))$$

(15 נ') 5. הוכח ב- $\vdash_K(\forall x\forall y\, A(x,y))\supset(\forall x\, A(x,x))$
(הוכחה ללא שימוש במשפט השלמות).

(15 6. נגדיר כמת 0-מקומי $\perp$ שערכו F בכל פונקציית אמת. האם $\{\supset,\perp\}$ שלמה פונקציונלית? מדוע?

(15 נק') 7. עבור אילו איברים מהתחום מקבלת הנוסחה $\forall x\forall y\, A_1^2(f_1^2(x,z),y)$ ערך אמת T בהשמה

$A_1^2(x,y)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle\}$ $f_1^2(x,y)=y$ $D=\{a,b\}$

(15 נק') 8. נגדיר $D=\{x\mid$ x בן אדם $\}$ $B=\{x\mid$ x ספר $\}$

$S(x,y)=\{\langle x,y\rangle\mid$ x מְסַפֵּר את y $\}$

כתוב פסוק בתחשיב הפרדיקטים שאומר: "לא קיים ספר שמספר בדיוק את אותם בני אדם שלא מספרים את עצמם".

בהצלחה.

5 V

85 תיק

לוגיקה 88-200 תשנ"ו סמ' א מועד א ד"ר משה קופל

ענה על כל השאלות במקומות המסומנים בדפי השאלון

הוסף הסברים במחברת בהצלחה!

1) הטענה $p, p\to r, r\to q \models p\wedge q$ משמעותה:

שהנוסחה ________ $= \alpha$ אינה ניתנת לסיפוק.

נוסחה α שקולה לנוסחת ה CNF ________ $=\beta$

רשום הפרכה רזולוציה לנוסחה β:

1. ________ 5. ________

2. ________ 6. ________

3. ________ 7. ________

4. ________ 8. ________

2) הקבוצה האינסופית של נוסחות $\{p_i \vee (\neg p_{i+1} \wedge \neg p_{i+2}) \mid i=1,2,3,\dots\}$

הינה (כן / לא) ________ ניתנת לסיפוק. כדי להוכיח זאת

ניתן להיעזר במשפט (הרזולוציה / הקומפקטיות / הרברנד) ________

7. ________ כפי הדורך)

6

(3) יהי α הפסוק $\forall x \exists y [r(x,y) \wedge r(f(x),y)]$

יהי β הפסוק $\exists y \exists x [r(x,y) \wedge r(f(x),y)]$

מצא אינטרפרטציה I כך ש I מודל ל α ולא ל β

I' " I' " β " α

$|I| =$ ______ $r_I =$ ______ $f_I =$ ______

$|I'| =$ ______ $r_{I'} =$ ______ $f_{I'} =$ ______

(אם לא קיימת אינטרפרטציה כזאת סמן ב X)

(4) יהי α הפסוק:

$$\forall x (p(x) \to [\forall y (q(x,y) \to r(x))])$$

$$\wedge \exists x (p(x) \wedge \exists y (q(x,y) \wedge h(x,y)))$$

$$\wedge \neg \exists x \exists y (r(x) \wedge h(x,y) \wedge s(x,y))$$

השתמש בסקולמיזציה למצוא פסוק אוניברסלי α_s כך

ש α_s ניתן לסיפוק אם ורק אם α ניתן לסיפוק

$\alpha_s =$ ______

______

7. ______

(כי הדרך)

ג

יהי φ הפסוק האוניברסלי

$$\forall x\ \forall y\ \{\ r(x,y)$$

$$\wedge \left[s(x,y) \vee \neg r(y,h(x,y)) \vee \neg r(h(x,y),h(x,y)) \right]$$

$$\wedge \left[\neg r(y,h(x,y)) \vee \neg r(h(x,y),h(x,y)) \vee \neg s(x,h(x,y)) \vee \neg s(h(x,y),h(x,y)) \right] \}$$

תחום ההרברנד של φ = ____________________

קבוצת הבסיס של φ = ____________________

רשום הפרכת רזולוציה של φ:

1. ____________________
2. ____________________
3. ____________________
4. ____________________
5. ____________________
6. ____________________
7. ____________________

(המשך מעבר לדף כפי הצורך)

2

[redacted]

Lecturer: Dr. Larry Manevitz
Duration of examination: 2 1/2 hours

Answer any 4 out of 5:

I. (a) Define: two sets have the same cardinality (i.e. the same "size").

(b) Show that the natural numbers and the even numbers have the same cardinality.

II. Show that the reals between 0 and 1 and the natural numbers have different cardinality.

III. State the continuum hypothesis. Describe what is known about it.

IV. Desribe what is meant by a formal system. Be sure and define all the main features.

V. Here is the MU system (of Hofstadter). Alphabet = {M,I,U}.
Formulas = {all words in M,I,U}. Axioms = {MI}.

Rules: Let w be any word (i.e. string of symbols in the alphabet).

1. From wI you may infer wIU.
2. From Mw you may infer Mww.
3. If III appears in w, you may infer (from w) the word obtained by replacing III by U in w.
4. If UU occurs in a word you may infer the word obtained by dropping the UU from it.

Here is a formal proof of MUIIU. Justify each step in the proof.

	Statement	Reason
1.	MI	
2.	MII	
3.	MIIII	
4.	MIIIIU	
5.	MUIU	
6.	[redacted] MUIUUIU	
7.	MUIIU	

Fall, 1984 **9** [redacted]

Moed B: 3 hours

Lecturer: Dr. L. Manevitz

Show all work. Do each problem on a fresh page. Good Luck!

I. Which of the following are tautologies? Prove your answer.

(a) $\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q)$ (b) $(\neg p \to q) \leftrightarrow (p \vee q)$.

II. $(p \to \neg q) \& (r \to p)$. Find an equivalent formula in DNF.

III. (a) State the Completeness Theorem

(b) Show that $p \to (q \vee r)$ is not a theorem in our system

(c) Show that $p \to (p \to p)$ is a theorem in our system

IV. In our formal system the only rule of deduction is modus ponens (MP). Our axioms are of the form: (1) $p \to (q \to p)$ (2) $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to$ ...

(3) $[(\neg q \to \neg p)] \to [(\neg q \to p) \to q]$.

Here p, q, r can be any formulas even complicated ones.

Recopy the following into your answer book and fill in the blanks (underline your answer.)

~~Theorem.~~ We wish to prove $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$.

First we give a formal proof of $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash C$

Please fill in the reasons.

		Reasons
(1)	$A \to B$	Hypothesis (given) [This is an example]
(2)	$B \to C$	________
(3)	A	________
(4)	B	________
(5)	C	________

Now show how we can deduce $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$

Justify your answer. (i.e. state in full any theorem you use.)

V. (a) State the Compactness Theorem

(b) Show that if any finite map can be covered with four colors than so can any infinite map.

15

ב"ה, בחינה בלוגיקה, 88-700, סמסטר ב' מועד ב' תשמ"ו

שם המרצה: ד"ר לרי מנביץ.

משך הבחינה: שעתיים.

תאריך הבחינה: 15,9,86

ענה על 4 מתוך 6 השאלות הבאות:

1. Γ קבוצה עקבית של נוסחות, הוכח שקיים קבוצה Δ של נוסחות כך ש-

1. Δ עקבית.

2. לכל φ (בחתימה של Δ) $\varphi\in\Delta$ או $\neg\varphi\in\Delta$

3. לכל φ ולכל משתנה x קיים סימן קבוע c כך שהנוסחה

$\neg\forall x\,\varphi \to \neg\varphi[\frac{c}{x}]$ שייכת ל- Δ

2. אידה מהבאים נכונים ? הוכח את תשובתך.

(α,β הן נוסחות)

1. $\vdash \exists x(\alpha\wedge\beta) \to (\exists x\alpha\wedge \exists x\beta)$

2. $\vdash \exists x\alpha\wedge\exists x\beta \to \exists x(\alpha\wedge\beta)$

3. $\vdash \alpha(y) \leftrightarrow \forall x(x\approx y \to \alpha(x))$

3. הוכח שקיימת חבורה אין סופית כך שלכל x בחבורה $x\cdot x = e$.

(רמז: תחשוב על חבורות Z_{2n} לכל n).

4. Γ_1, Γ_2 הן קבוצות של נוסחות באותו שפה כך ש- <u>לא</u> קיים מבנה

כך ש- $A\models\Gamma_1$ ו- $A\models\Gamma_2$

הוכח שקיים נוסחא φ באותה שפה כך ש-

1. $A\models\varphi \Leftarrow A\models\Gamma_1$

2. $A\models\neg\varphi \Leftarrow A\models\Gamma_2$

5. L היא שפה עם $\approx$ וסימן יחס $R(,)$ דו-מקומי.

1. רשום אוסף של נוסחות Γ בשפה הזו כך ש- $A\models\Gamma$ אם ורק אם:

א. $||A||$ היא אין סופית

ב. R^A הוא יחס שקלות

ג. בכל מחלקת שקילות יש בדיוק שתי איברים

(שאלה 5 ממשיכה בעמוד הבא)

11

(המשך בחינה בלוגיקה)

המשך שאלה 5:

2. נסח את משפט Los-Vaught

3. הוכח ש- T היא תורה שלמה.

6. $R = \langle \text{ממשים}, +, \times, 0, 1 \rangle$

הוכח שיש תבנית U כך ש-

1. $R \equiv U$ (מספקים אותו פסוקים בשפה המתאימה).

2. U היא בין מניה.

3. כל מספר רציונלי שייכת ל- U

בהצלחה !

כוא

29.8.89

12

בחינה בלוגיקה מתמטית
סימסטר ב', מועד ב'

זמן הבחינה: שעתיים.
נא לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות.

1. להגדיר או לנסח:
א) גזירה (הוכחה) של נוסחה ψ מקבוצת הנחות Γ במערכת דדוקטיבית S.
ב) איזומורפיזם בין שתי מערכות (מבנים) מאותו טיפוס σ.
ג) $\varphi(t/x)$ (תוצאות הצבה של t עבור x בנוסחה φ).

2. לנמק בקצרה או להפריך ע"י דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות, שבהן L שפה כלשהי מסדר ראשון.
א) אם φ, ψ נוסחאות של L, x משתנה אז $\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x \varphi \vee \forall x \psi$.
ב) אם לפסוק φ של L יש מודל אינסופי אז יש לו שני מודלים אינסופיים לא איזומורפיים.
ג) כל שני מודלים אינסופיים לשפה L הם שקולים אלמנטרית.

3. תהי L שפה פסוקית עם שלושה אטומים r, q, p והקשר $\wedge$ בלבד. תהי S המערכת הדדוקטיבית ב-L בעלת שלושת כללי ההסק הבאים:

$$\frac{\varphi, \psi}{\psi \wedge \varphi}, \quad \frac{\psi \wedge \varphi}{\psi}, \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}.$$

להוכיח ש-S נכונה במובן החזק ושלמה במובן החזק (לשפה L).

4. תהי L_1 שפה מסדר ראשון עם פרדיקט חד-מקומי P, שהוא הקבוע הלא-לוגי היחיד שלה, והקבועים הלוגיים $=, \sim, \vee, \exists$. להוכיח שכל שני מודלים איזומורפיים לשפה L_1 הם שקולים אלמנטרית.

הערה: כידוע המסקנה נכונה לכל שפה L מסדר ראשון. ההצטמצמות ל-L_1 בלבד נועדה רק לפשט את הסימונים ולהקטין את מספר הסעיפים בהוכחה.

13

בחינה בלוגיקה, עמוד 2

5. תהי L_1 השפה הנדונה בשאלה 4. מודל $\mathcal{Q} = \langle A,B \rangle$ לשפה זו יקרא עשיר כאשר גם B וגם $A \setminus B$ הן קבוצות אינסופיות. (בסימון $\mathcal{Q} = \langle A,B \rangle$ A התחום (העולם) של המודל ו-B הפרוש ב-$\mathcal{Q}$ של הפרדיקט P, כך ש-$B \subseteq A$.)

א) להראות שקיימת קבוצת פסוקים Γ_1 ב-L_1 כך שהמודלים של Γ_1 הם בדיוק המודלים העשירים לשפה.

ב) להראות שלא קיים פסוק φ ב-L_1 שהמודלים שלו הם בדיוק המודלים העשירים לשפה.

[רמז ל-(ב): אם קיים φ כזה הוא חייב להיות תוצאה לוגית של Γ_1 שנבנתה בחלק (א) ולכן גם תוצאה לוגית של תת-קבוצה סופית של Γ_1; בדוק שלכל תת-קבוצה סופית של Γ_1 שבנית בחלק (א) יש מודל שאינו עשיר.]

בהצלחה

ב"ה

לוגיקה מתמטית 1 - 88-200-07 - מועד ב' תשנ"ה

המרצה: פרופ' ע. אמיר

משך הבחינה: שעתיים

מותר להעזר במחברות

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

(10 נק') 1. הראה אם הנוסחה הבאה טאוטולוגיה או לא.

$$((A\vee B)\wedge(D\supset\sim B))\supset((A\supset(B\supset C))\supset(B\supset(A\supset C)))$$

(10 נק') 2. הוכח שאם A ניתנת למניה רקורסיבית בסדר יורד אז A כריעה.

( ) 3. מה המשתנים החופשיים של הנוסחה $\forall x((\forall y(A(x,y,z)))\supset(\forall z(A(z,y,x))))$

(5 נק') 4. האם $f_1^2(x_1,x_2)$ חופשי ל x_1 בנוסחה $(\forall x_2 A_1^2(x_2,a_1))\vee(\exists x_1(A_1^2(x_1,x_2)))$?

(15 נק') 5. הוכח מבלי להשתמש במשפט השלמות:

$$\vdash_K \forall x(\alpha\supset\beta)\supset(\forall x\alpha\supset\beta)$$

(10 נק') 6. האם קיימת תורה עקבית שהמשפטים שלה נכונים בכל ההשמות עם תחומים סופיים אבל שאין לה שום מודל אינסופי? הוכח טענתך.

(15 נק') 7. הגדר תחום ופרדיקטים וכתוב בעזרתם פסוק בתחשיב הפרדיקטים שאומר:
"ניתן להטעות חלק מהאנשים כל הזמן וניתן להטעות את כל האנשים חלק מהזמן אבל לא ניתן להטעות את כל האנשים כל הזמן".

(15 נק') 8. הוכח $\nvdash_K (\forall x\alpha\supset\forall x\beta)\supset\forall x(\alpha\supset\beta)$

(מותר להעזר במשפט השלמות)

בהצלחה

בז

שימו לב למבחן 2 עמודים!

ב"ה, בחינה בלוגיקה, מועד א' סמסטר ב', תשמ"ו, 88-372

תאריך הבחינה: 15,6,86

שם המרצה: ד"ר לרי מנביץ

משך הבחינה: שעתיים

חובה עליך לענות על שאלה מספר 1 ועל 3 מתוך 5 האחרות:

1. (שאלה חובה)

נסח את המשפטים הבאים:

א. משפט השלמות

ב. משפט הקומפקטי

ג. משפט Lowenheim-Skolem עולה

ד. משפט Lowenheim-Skolem יורד

ה. משפט הנכונות

ענה על 3 שאלות מתוך 5 הבאות:

2. איזה מהבאים נכונים. הוכח את תשובתך (ז"א הוכח שהוא נכון או תן דוגמא נגדית)

1. $\vdash \forall x \exists y\, \psi(x,y) \to \exists y \forall x\, \psi(x,y)$

2. $\vdash \forall x\, \psi(x) \to \psi(a)$

3. $\vdash \psi(a) \to \forall x\, \psi(x)$

4. $\vdash \exists y \forall x\, \psi(x,y) \to \forall x \exists y\, \psi(x,y)$

3. א. ממשפט השלמות הוכח את משפט הקומפקטי

ב. ממשפט הקומפקטי הוכח את משפט Lowenheim-Skolem עולה.

4. נתון לך קבוצה Δ של נוסחאות בשפה (בלי =) כך ש-

1. לכל נוסחא φ בשפה $\varphi \in \Delta$ או $\neg\varphi \in \Delta$

2. Δ עקבית

3. לכל נוסחא ψ בשפה ולכל משתנה x קיים קבוע c כך ש- $\neg\forall x\psi \to \neg\psi\left[\frac{c}{x}\right]$

נמצאת ב- Δ בנה מודל [illegible] כך ש- [illegible] $\models \Delta$

2/...

18

המשך בחינה בלוגיקה:

5. א. הוכח שהמחלקה של חבורות הוא EC.

ב. האם הקבוצה של חבורות אין סופיות EC? EC_δ? הוכח

ג. האם הקבוצה של חבורות סופיות EC? EC_δ? EC? הוכח

6. א. נסח את משפט Łos-Vaught.

ב. הוכח שהתורה של סדר לינארית צפוף בלי איבר ראשון או אחרון (DLO) הוא שלם.

בהצלחה !