Examination: Logic 19 8/9/86

Lecturer: Dr. Larry Manevitz

Two hours.

Answer any 4 out of 5.

I. (a) Define: two sets have the same cardinality (i.e. the same "size")

(b) Show that the natural numbers and the even numbers have the same cardinality.

II. Show that the reals between 0 and 1 and the natural numbers have different cardinality.

III. State the continuum hypothesis. Describe what is known about it.

IV. Describe what is meant by a formal system. Be sure and define all the main features

V. Here is the MU system (of Hofstadter). Alphabet = {M, I, U}

Formulas = {all words in M, I, U}. Axioms = {MI}

Rules: Let w be any word (i.e. string of symbols in the alphabet)

1. From wI you may infer wIU
2. From Mw you may infer Mww.
3. If III appears in w, you may infer (from w) the word obtained by replacing III by U in w.
4. If UU occurs in a word you may infer the word obtained by dropping the UU from it.

Here is a formal proof of MUIIU. Justify each step in the proof:

Statement	Reason
1. ~~MI~~ MI	______
2. MII	______
3. MIIII	______

21 88-3-17

16.2.88 [illegible]

זמן הבחינה: שעתיים.

מותר להשתמש בחומר עזר מכל הסוגים.

יש לבחור 3 מתוך 5 השאלות הבאות.

בבדיקה ינתנו נקודות נוספות עבור כתיבה ברורה ומסודרת - נא הקפידו לכתוב [illegible].

בהצלחה

1. אלו מבין הטענות הבאות אמיתיות? טענה נכונה יש להוכיח, וטענה שאינה נכונה יש להפריך ע"י דוגמה נגדית.

א) בשפה פסוקית שהקשרים היחידים שלה הם $\not\equiv$, $\wedge$, $\vee$ אין טאוטולוגיות.

ב) אם Γ קבוצה אינסופית של נוסחאות בשפה פסוקית אז יש תת-קבוצה סופית Δ של Γ כך ש- $Mod(\Gamma)=Mod(\Delta)$.

ג) נאמר על שתי נוסחאות A, B של השפה מסדר ראשון שהן שקולות מעל המבנה $\mathfrak{A}$ כאשר $\|A\|_f = \|B\|_f$ לכל השמה f לתוך המבנה המתאימה לשתיהן [כלומר - שמוגדרת מכיל את $FV(A) \cup FV(B)$].

הנוסחאות $0 < v_1$ ו: $\exists v_2 (v_1 = v_2 \cdot v_2 \wedge \exists v_3 (v_2 \cdot v_3 = 1))$ שקולות מעל המבנה.

ד) הפסוק $\forall v_1 [\exists v_2 (0 < v_1) \to \exists v_3 \forall v_3 (v_1 = v_3 \cdot v_3)]$ אמיתי במבנה. [בדוק היטב לפי הגדרת האמת.]

22

16.2.88 בלוג' מתין 3

בחינה בלוגיקה - המשך (עמוד 2)

2. יהי L שפה פסוקית עם קבוצת האטומים P ועם הקשרים: ∨, ∧, ~, f, t בלבד.

נגדיר מודל קבוצתי לשפה L כזוג סדור $\mu=(X,S)$, כאשר X קבוצה כלשהי, S פונקציה שמתאימה לכל p ב-P תת-קבוצה $S(p) \subseteq X$.

[כלומר - לכל אטום של השפה מתאימה תת-קבוצה של X.]

נגדיר את הערך $\|A\|_\mu$ של נוסחה A במודל הקבוצתי $\mu=(X,S)$ באינדוקציה על מבנה A כדלקמן:

עבור אטום p: $\|p\|_\mu = S(p)$;

$\|f\|_\mu = \emptyset$; $\|t\|_\mu = X$;

$\|\sim A\|_\mu = X - \|A\|_\mu$;

$\|A \vee B\|_\mu = \|A\|_\mu \cup \|B\|_\mu$; $\|A \wedge B\|_\mu = \|A\|_\mu \cap \|B\|_\mu$.

[כלומר - הפעולות הלוגיות ~, ∧, ∨ מתפרשות כהשלמה, חיתוך ואיחוד של קבוצות.]

נאמר שהנוסחאות A, B שקולות קבוצתית כאשר $\|A\|_\mu = \|B\|_\mu$ לכל מודל קבוצתי μ.

להוכיח שאם נוסחאות A, B הן שקולות קבוצתית אזי הן שקולות לוגית.

[רמז: יש דרך סטנדרטית לעבור ממודל (רגיל) s, כלומר פונקציה $s: P \to \{T,F\}$, למודל קבוצתי (X,S) שבו X קבוצה בעלת איבר אחד. מכאן שאם יש מודל קבוצתי $\mu=(X,S)$ שבו $\|A\|_\mu \neq \|B\|_\mu$ אז יש ב-X איבר x השייך ל-$\|A\|_\mu$ ולא ל-$\|B\|_\mu$ או להפך, ואפשר להשתמש בו כדי לבנות מודל s שבו $\|A\|_s \neq \|B\|_s$.]

דף 3 מתוך 3

23 16.2.88

בחינה בלוגיקה - עמוד 3

3. ב) האם קיימת נוסחה הבנויה מהאטומים q, p באמצעות הקשר $\rightarrow$ בלבד ואשר שקולה לוגית לנוסחה $p \wedge q$?

ג) אותה שאלה לגבי הנוסחה $p \vee q$ (במקום $p \wedge q$).

הוכחות לשני החלקים צריכות להיות מנומקות (ע"י דוגמה לנוסחה המבוקשת או הוכחה שאין כזאת).

4. תהי Σ קבוצה סופית, Σ^* קבוצת כל הסדרות הסופיות של איברים מ-Σ, Σ^{ω} קבוצת כל הסדרות האינסופיות של איברים מ-Σ. נקרא לאיברי Σ אותיות, לאיברי Σ^* מילים סופיות (מעל Σ) ולאיברי Σ^{ω} מילים אינסופיות (מעל Σ).

להוכיח שאם T קבוצה אינסופית של מילים סופיות אז קיימת מילה אינסופית z אשר כל רישא סופית שלה היא רישא של אחת המילים ב-T (כלומר - לכל n קיימת מילה y_n ב-T אשר n האותיות הראשונות של z מהוות רישא שלה).

[רמז: יש גם הוכחה קומבינטורית ישירה, בלי שימוש בלוגיקה ובמשפט הקומפקטיות.]

5. בשפה מסדר ראשון של מערכת המספרים הממשיים, שהוגדרה בכיתה, נגדיר נוסחה מיוחדת כנוסחה אטומית שצורתה $\sigma = \tau$ (ללא כימות כלשהו) או נוסחה הבנויה מנוסחאות אטומיות כאלה באמצעות $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ (אך ללא שלילה) בלבד. להוכיח שכל נוסחה בשפה הנ"ל שקולה מעל הממשיים לנוסחה מיוחדת.

[רמז: ראה שאלה 1ג). השתמש גם בעובדה שהנוסחאות $\sim\forall x A$, $\exists x \sim A$ שקולות, וכך גם $\sim\exists x A$, $\forall x \sim A$.]

24

בחינה בלוגיקה מתמטית   סימסטר ב', מועד ב', תש"ן   12.9.90

זמן הבחינה: שעתיים.

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות.

1. להגדיר או לנסח –

א) נוסחה בצורה פרנכסית נורמלית;

ב) משפט LST (לוונהיים-סקולם-טארסקי).

2. תהי L שפה מסדר ראשון.

א) להגדיר מתי נוסחה ψ של L היא תוצאה לוגית במובן הרחב של קבוצת נוסחאות Γ.

ב) להוכיח שיחס התוצאה הלוגית במובן הרחב (בין נוסחאות לקבוצות של נוסחאות) הוא יחס תלוי.

3. תהי L שפה מסדר ראשון עם סמל פעולה $+$ ועם הקשרים הלוגיים הרגילים ויהי φ הפסוק $\exists! v_1 \forall v_2 (v_1+v_2=v_2)$.

א) מצא פסוק φ' שקול לוגית ל-φ שמופיעים בו הקשרים הלוגיים $=, \sim, \wedge, \vee, \forall, \exists$ בלבד.

ב) מצא פסוק φ'' בצורה פרנכסית נורמלית שהינו שקול לוגית ל-φ.

4. א) להגדיר מתי שתי מערכות $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ מאותו טיפוס הן שקולות אלמנטרית.

ב) נמק בקצרה או תן דוגמה נגדית:

[1] אם G ו-H חבורות וקיים הומומורפיזם מ-G על H אז G ו-H שקולות אלמנטרית.

[2] כל שני שדות סדורים בני מניה הם שקולים אלמנטרית.

5. להוכיח שכל סדר לינארי ניתן לשיכון בסדר לינארי צפוף.

ביתר פירוט: תהי A קבוצה ויהי $<_A$ סידור לינארי שלה. אז

לג

קיימים: קבוצה B, סידור ליניארי צפוף $<_B$ של B ופונקציה שומרת סדר $f: A \to B$.

[הערות: סידור ליניארי $<_B$ על B נקרא צפוף כאשר בין כל שני איברים שונים של B יש איבר ביניהם; פונקציה $f: A \to B$ נקראת שומרת סדר כאשר

$$x <_A y \Rightarrow f(x) <_B f(y)$$

לכל x, y ב- A. מכאן נובע גם ש- f חח"ע.

רמז: שימוש במשפט הקומפקטיות לקבוצת פסוקים מתאימה Γ בשפה מסדר ראשון L הכוללת סמל יחס בינארי $<$ וקבוע c_a לכל איבר a של A. Γ כוללת, בין השאר, את הפסוקים $c_{a_1} < c_{a_2}$ לכל זוג איברים a_1, a_2 ב- A כך ש- $a_1 <_A a_2$. להוכחת הספיקות הסופית של Γ אפשר לנצל את הסדר הרגיל של הרציונליים.]

בהצלחה

25

בחינה ב~~[illegible]~~ מועד א

מרצה: דר' לבי מנחם

זמן הבחינה: 2½ שעות

I. (חובה לענות על שאלה הזו)

נסח את המשפטים הבאים:

(a) משפט השלמות

(b) משפט הקומפקטיות

(c) משפט Lowenheim-Skolem יורד

(d) משפט הנכונות

ענה על 3 מתוך שאלות II – VI

II. איזה מהפסוקים הבאים נכונים? הוכח את תשובתך.

(צ"ל – הוכח שפסוק נכון או תן דוגמה נגדית)

(a) $\vdash \forall x \psi(x) \rightarrow \psi(a)$

(b) $\vdash \psi(a) \rightarrow \forall x \psi(x)$

(c) $\vdash \forall x \exists y \psi(x,y) \rightarrow \exists y \forall x \psi(x,y)$

(d) $\vdash \exists y \forall x \psi(x,y) \rightarrow \forall x \exists y \psi(x,y)$

III. (a) ממשפט השלמות הוכח את משפט הקומפקטיות.

(b) ממשפט הקומפקטיות הוכח את משפט L-Sk עולה.

IV. (a) הראה כי מחלקת כל החבורות היא EC.

(b) האם מחלקת כל החבורות האינסופיות היא EC? EC_Δ? הוכח.

(c) האם מחלקת כל החבורות הסופיות היא EC? EC_Δ? הוכח.

27

בחינה בלוגיקה

V. Δ היא קבוצה של נוסחות בשפה נתונה L כך ש:

(1) Δ עקבית.

(2) לכל נוסחה φ בשפה, $\varphi\in\Delta$ או $\neg\varphi\in\Delta$.

(3) לכל נוסחה φ ולכל משתנה x ~~קיים~~ קיים סימן קבוע c כך ש

$$(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi[\tfrac{c}{x}]) \in \Delta$$

הוכח כי קיים מודל $[\sigma|s]$ של L כך ש $[\sigma|s] \models \Delta$.

VI. (א) נסח את ~~משפט~~ מבחן Los-Vaught.

(ב) הוכח שהתורה של סדר ~~...~~ לינארי ~~...~~ צפוף בלי איבר ראשון או אחרון היא תורה שלמה.

372

28

7.9.88

בחינה [redacted]

מועד ב', תשמ"ח

זמן הבחינה: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר (ספרים, מחברות וכד').
נא לענות על שלוש מתוך השאלות הבאות.

1. א) מצא נוסחה בצורה פרנכסית נורמלית השקולה לוגית לנוסחה הבאה:

$$\exists v_1 (v_1 < v_2 \wedge \sim (v_1 < v_3)) \leftrightarrow v_3 < v_2 .$$

ב) האם הנוסחה הבאה תקפה לוגית? התשובה צריכה להיות מנומקת.

$$(v_1 = v_3 \vee v_1 = v_4) \wedge (v_2 = v_3 \vee v_2 = v_4) \wedge v_1 \neq v_2 \wedge (v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot \ldots$$
$$\rightarrow v_1 \cdot v_2 = v_3 \cdot v_4 .$$

2. לנמק בקצרה או להפריך ע"י דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות.

א) אם A, B נוסחאות בשפה מסדר ראשון, x משתנה אז

$$\forall x (A \wedge B) \equiv \forall x A \wedge \forall x B .$$

[$\equiv$ מסמן שקילות לוגית.]

ב) כמו (א), עם $\vee$ במקום $\wedge$ בשני האגפים.

ג) הנוסחה $0\cdot 1 = 1 \cdot 0$ היא תוצאה לוגית של הנוסחה $v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1$.

ד) כל שדה סדור בר-מניה שקול אלמנטרית לשדה הסדור של הרציונליים.

3. תהי L_0 השפה מסדר ראשון שאין בה סמלים לא-לוגיים (הנוסחאות האטומיות היחידות של L_0 הן מהצורה $x=y$ כש-

29 מבחן דף 2 מתוך 2
לוגיקה מתמטית מועד ב'

 7.9.88

ע״י קבוצה לא ריקה M שהיא קבוצת האברים שלו, ונכתוב $\mathfrak{M}=\langle M\rangle$.
יהי A פסוק של L_0 ונניח שקיים מודל אינסופי $\mathfrak{M}_0$ לשפה שבו A אמיתי.

א) להוכיח ש- A אמיתי בכל מודל אינסופי $\mathfrak{M}$ לשפה L_0.
[רמז: להראות בעזרת משפטי לוונהיים סקולם ש- $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}$ שקולים אלמנטרית.]

ב) להוכיח שקיים מספר טבעי n כך ש- A אמיתי גם בכל מודל סופי שמספר איבריו גדול מ- n.
[רמז: אחרת ניתן לקבל בעזרת משפט הקומפקטיות מודל אינסופי של $\sim A$, בסתירה ל-(א).]

4. עבור כל מספר טבעי n נסמן ב- $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ את תת-השדה של הממשיים שאבריו הם כל המספרים מהצורה $a+b\sqrt{n}$ כש- a, b רציונליים כלשהם. [ידוע שאם n אינו ריבוע של מספר שלם אז $\sqrt{n}$ הוא אי-רציונלי ולכל אבר ב- $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ יש הצגה <u>יחידה</u> בצורה $a+b\sqrt{n}$ כש- a, b רציונליים.]
להראות שאף שנים מבין השדות
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{3}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{5}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{7}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{11}),\ \ldots$$
אינם שקולים אלמנטרית.
[רמז: עבור כל n טבעי יש פסוק A_n בשפת השדות המביע קיום שורש ריבועי ל- n. העזר בפסוקים אלה עבור n-ים מתאימים.]

5. יהי $\mathfrak{M}$ מודל לשפה מסדר ראשון L ותהי $A_1, A_2, A_3, \ldots$ סדרה אינסופית של נוסחאות ב- L שלכולן אותו משתנה חופשי יחיד x. נתון שעבור כל n טבעי הפסוק $\exists x(A_1\wedge\ldots\wedge A_n)$ אמיתי ב- $\mathfrak{M}$. האם נובע שקיים אבר a של המודל כך <u>שכל</u> הנוסחאות A_n אמיתיות ב- $\mathfrak{M}$ תחת ההשמה.

בחינה בלוגיקה מתמטית   סימסטר ב', מועד א'   תש"ן
12.7.90

88.571

36

זמן הבחינה: שעתיים.
יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות.

1. להגדיר את המושג "מערכת דדוקטיבית נכונה ושלמה" (לשפה פסוקית L). יש לכלול גם הגדרות מקדימות, כמו הגדרת מערכת דדוקטיבית (סתם), אבל רק את מה שדרוש לצורך ההגדרה הסופית.

2. תהי L שפה מסדר ראשון.

א) להגדיר מתי נוסחה ψ של L היא תוצאה לוגית במובן הרחב של קבוצת נוסחאות Γ.

ב) נמק בקצרה או תן דוגמה נגדית:

[1] אם φ, ψ תקפות לוגית אז כל אחת מהן תוצאה לוגית במובן הרחב של האחרת (ונאמר אז בקיצור שהן שקולות במובן הרחב).

[2] אם φ, ψ שקולות במובן הרחב אז הן שקולות לוגית.

3. תהי L שפה מסדר ראשון עם סמל פונקציה + וכל הקשרים הלוגיים הרגילים. יהי φ הפסוק

$$\forall v_1 \exists v_2 (v_1 + v_1 = v_2) \leftrightarrow \exists! v_1 \forall v_2 (v_1 + v_2 = v_2).$$

א) מצא פסוק φ' שקול לוגית ל-φ שמופיעים בו הקשרים הלוגיים $=, \neg, \vee, \exists$ בלבד.

ב) מצא פסוק φ'' בצורה פרנקסית נורמלית שהינו שקול לוגית ל-φ.

[רצוי לפשט את φ', φ'' במידת האפשר.]

4. תהי L שפה מסדר ראשון עם כל הקשרים הלוגיים הרגילים.

א) להראות שקיימת סדרת פסוקים $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ של L כך שלכל n שלם חיובי המודלים של φ_n הם בדיוק המודלים $\mathfrak{A}$ לשפה L המקיימים $n \le |A|$ (דהיינו, מודלים בעלי n איברים לפחות).

37

בחינה בלוגיקה, עמוד 2

ב) להראות שלא קיים פסוק ψ של L אשר המודלים שלו הם בדיוק המודלים הסופיים לשפה L. [רמז: משפט הקומפקטיות.]

5. תהי L שפה מסדר ראשון עם הקבועים הלוגיים

$$=, \underline{t}, \underline{f}, \sim, \wedge, \vee, \forall, \exists$$

בלבד. נוסחאות של L שבהן הקשר $\sim$ אינו מופיע נקראות נוסחאות חיוביות.
להוכיח שאם $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ מודלים לשפה L כך ש- $\mathfrak{B}$ תמונה הומומורפית של $\mathfrak{A}$ אז כל פסוק חיובי אמיתי ב- $\mathfrak{A}$ הינו אמיתי גם ב- $\mathfrak{B}$.
[רמז: יהי $f : A \xrightarrow{\text{על}} B$ הומומורפיזם מ- $\mathfrak{A}$ על $\mathfrak{B}$. להוכיח באינדוקציה על נוסחאות חיוביות φ של L שאם α השמה לתוך A המתאימה ל-φ, כך ש- φ אמיתית ב- $\mathfrak{A}$ תחת α, אז φ אמיתית ב- $\mathfrak{B}$ תחת $f\circ\alpha$.
בהכנה יש לנסח ולהוכיח את הקשר בין $\|s\|_{\mathfrak{A},\alpha}$ לבין $\|s\|_{\mathfrak{B},f\circ\alpha}$ לכל ביטוי s של L והשמה α לתוך A המתאימה לו.]

בהצלחה

3.9.87

38

לוגיקה מתמטית   סמסטר ב מועד ב תשמ"ז   ד"ר משה קופל

לכל אחת מהשאלות בחר תשובה אחת. תצדק את תשובתך.
אפשר להסתמך על כל המשפטים שלמדנו בכתה.

1. טענה I: אם Σ היא קבוצה (סופית או לא-סופית) נתנת להכרעה של נוסחאות בלוגיקה פסוקית אז הקבוצה $S=\{\alpha \mid \Sigma \models \alpha\}$ נתנת להכרעה
טענה II: אם Σ כנ"ל אז קיימת Σ_0 סופית כך ש $S=\{\alpha \mid \Sigma_0 \models \alpha\}$
א) רק טענה I אמיתית ב) רק טענה II אמיתית
ג) שתי הטענות אמיתיות ד) שתי הטענות שקריות

2. אמיתות הנוסחה $\forall x\, \{x=y \to \exists x\, [P(x,y) \wedge P(y,x)]\}$ תלויה
א) במבנה ובהשמה ב) רק במבנה ג) רק בהשמה
ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

3. I: קבוצת המבנים K היא EC II: $Th\,K$ נתנת לאקסיומטיזציה סופית
א) I גורר II אבל II לא גורר I ב) II גורר I אבל I לא גורר II
ג) I אם ורק אם II ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

4. תהי N המספרים הטבעיים תהי $\cdot$ הכפלה תהי E הזוגיים ותהי P הראשוניים.
א) E נתנת להגדרה במבנה $\langle N,\cdot\rangle$ אבל P אינה נתנת להגדרה ב $\langle N,\cdot\rangle$
ב) P " E "
ג) E ו P נתנות להגדרה ב $\langle N,\cdot\rangle$ ד) E ו P אינן נתנות להגדרה ב $\langle N,\cdot\rangle$

5. תהי T תורה לא שלמה כך שכל המודלים של T בעוצמה $\aleph_0$ הם איזומורפים.
א) אז לT אין מודל סופי ב) אז לT יש מודל סופי אחד ויחיד
ג) אז לT יש יותר ממודל סופי אחד ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

3.4.87 המשך

6. תהי T תורה שלמה (בשפה L), תהי T קבוצה לא נתנת להכרעה.
תהי Σ תת-קבוצה נתנת להכרעה של T. אז:
א) $C_n\Sigma$ אינה שלמה (בשפה L)
ב) $C_n\Sigma$ אינה נתנת להכרעה
ג) $C_n\Sigma$ נתנת להכרעה
ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

26.3.89 **40** בחינה בלוגיקה מתמטית

88-372-01 סימסטר א', מועד ב'

זמן הבחינה: שעתיים.
יש לענות על שלוש מתוך 5 השאלות הבאות.

1. הגדר או לנסח:
א) שלמות מבחינת כוח ההבעה של שפה פסוקית.
ב) נוסחה בצורה דיסיונקטיבית (בשפה פסוקית עם הקשרים $t, f, \sim, \wedge, \vee$).
ג) תוצאה לוגית (של קבוצת נוסחאות נתונה).

2. תהי L שפה פסוקית שקבוצת האטומים שלה A היא אינסופית. ותהי Γ קבוצת נוסחאות של L. האם יתכן שיש בדיוק מודל אחד לשפה L שאינו מודל של Γ? תן דוגמה, או הסבר מדוע לא יתכן מצב כזה.

3. א) תהי L שפה פסוקית עם אטום אחד לפחות ועם הקשרים $\vee, \tilde{\vee}$ (דיסיונקציה רגילה ודיסיונקציה מוצלאה) בלבד. להראות ש-L אינה שלמה מבחינת כוח ההבעה. [רמז: התבונן במודל שבו כל האטומים שקריים.]
ב) תהי L' שפה פסוקית עם הקשרים $\vee, \tilde{\vee}, t$. הראה ש-L' שלמה מבחינת כוח ההבעה. [רמז: מצא דרך לבטא שלילה.]

4. א) מצא נוסחה בצורה דיסיונקטיבית השקולה לוגית לנוסחה $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$.
ב) הוכח שהנוסחה שמצאת מינימלית הן מבחינת מספר הדיסיונקטים והן מבחינת מספר הקוניונקטים בכל דיסיונקט.

5. נגדיר גרף (לא מכוון פשוט) (קודקוד-גרף) כזוג $G=(V,E)$ כש-V קבוצה, שאבריה נקראים קדקדי הגרף, E קבוצה שאבריה זוגות לא סדורים $\{x,y\}$ של קדקדים. אברי E נקראים הקשתות של הגרף. אם $\{x,y\}\in E$ נאמר ש-x, y קדקדים שכנים ב-G. תת-גרף של G הוא גרף $G'=(V',E')$ שבו $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$. צביעה של גרף G ב-k צבעים היא פונקציה $f: V\to\{1,\dots,k\}$

בחינה [redacted] מועד ד' 29.4.88

88-371-01

41

זמן הבחינה: שעתיים.

מותר להשתמש בכל חומר עזר.

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות.

1. תן הוכחה או הפרך ע"י דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות:

א) לכל שפה פסוקית בעלת מספר סופי של אטומים קיים קבוע K כך שכל נוסחה בשפה שקולה לוגית לנוסחה באורך קטן מ- K. (מדובר כאן בשפות פסוקיות הכוללות את כל הקשרים הסטנדרטיים.)

ב) אם הנוסחה A היא תוצאה לוגית של קבוצת הנוסחאות Γ אז $\Gamma\cup\{A\}$ ספיקה.

ג) אם האוסף C של קבוצות של נוסחאות הוא תכונת עקביות ואם $\Gamma\in C$, $(p\vee q)\in\Gamma$ אז $p\in\Gamma$ או $q\in\Gamma$.

ד) הפסוק

$$\forall v_1 \exists v_2 \forall v_3 \left((v_1 = v_2\cdot v_2) \vee (v_1 \neq v_3\cdot v_3)\right)$$

אמיתי בממשיים. [$s\neq t$ הוא קיצור ל- $\sim(s=t)$.]

2. תהי L שפה פסוקית (עם כל הקשרים הסטנדרטיים) ונתבונן במערכת הבאה של אקסיומות וכללים להוכחת נוסחאות של L מתוך הנחות:

האקסיומות הן כל הטאוטולוגיות;

וכלל ההסק היחיד הוא כלל הניתוק (מתוך A, $A\to B$ הסק את B).

עבור קבוצת נוסחאות Γ ונוסחה A נסמן $\Gamma\vdash A$ כאשר קיימת במערכת זו הוכחה של A מתוך Γ

(בהינתן, קיימת סדרת נוסחאות $B_1,\dots,B_m$ שכל אחת מהן

היינו איבר של Γ או טאוטולוגיה או נגזרת משתיים מקודמותיה ע"י כלל הניתוק, והנוסחה האחרונה בסדרה B_n היא A).

42

29.4.88

א) להוכיח את "משפט הנכונות":
אם $\Gamma \vdash A$ אז A תוצאה לוגית של Γ.

ב) להוכיח את "משפט השלמות החזק":
אם A תוצאה לוגית של Γ אז $\Gamma \vdash A$.

[רמז ל-(ב): הראה תחילה שאם A תוצאה לוגית של Γ אז קיימות נוסחאות $C_1,\dots,C_n$ ב-Γ ($n \geq 0$) כך שהנוסחה

$$(C_1 \to (C_2 \to \dots \to (C_n \to A)\dots))$$

היא טאוטולוגיה.]

3. מצא את כל לוחות האמת האפשריים של נוסחה הנבנית ~~[illegible]~~ מהאטומים p, q באמצעות הקשר ↔ בלבד.

4. תהי L שפה פסוקית עם הקשרים $\sim$, $\vee$, $\wedge$ בלבד ויהי $\mathcal{C}$ אוסף של קבוצות נוסחאות של L. נניח –

א) $\mathcal{C}$ תכונת עקביות;

ב) לכל קבוצת נוסחאות Γ:
$\Gamma \in \mathcal{C}$ אמם כל תת-קבוצה סופית של Γ שייכת ל-$\mathcal{C}$.

הוכח שכל קבוצה השייכת ל-$\mathcal{C}$ היא ספיקה. [רמז: השווה להוכחת משפט הקומפקטיות בעזרת הלמה של צורן, עם $\mathcal{C}$ הנ"ל (במקום) קב' הקבוצות הספיקות]

43 29.4.88

5. נסתכל בשפה מסדר ראשון עם הקבועים 0, 1, סמלי הפונקציות −, +, · וסמל השוויון (=) וכן המשתנים, הקשרים והכמתים הרגילים. [שים לב שהסמל > איננו בשפה.]

א) מצא נוסחה בשפה זו, במשתנה החופשי היחיד v_1, המגדירה בשדה הממשיים את קבוצת המספרים החיוביים. [כלומר לכל ממשי a: הנוסחה אמיתית בהשמה $a \mapsto v_1$ אם"ם $0<a$.]

ב) אותה שאלה עבור שדה המספרים הרציונליים במקום שדה המספרים הממשיים.

[רמז ל-(ב): ידוע שכל מספר שלם חיובי הוא סכום של 4 ריבועים. כל מספר רציונלי חיובי הוא מנה של שני שלמים חיוביים.]

בהצלחה

ד"ר משה קופל מועד א' סמ' ב' תשמ"ג

312-01

44

1) האמיתות של הנוסחה $(\forall y\, P(x,y)) \to (\exists x\, P(x,y))$

א. תלויה במבנה ובהשמה
ב. תלויה במבנה לבד
ג. תלויה בהשמה לבד
ד. לא תלויה במבנה או בהשמה

2) יהי U המבנה $\langle R,+,< \rangle$ כאשר R מסמן את הממשיים ו $<,+$ הם כרגיל, יהי R^+ הממשיים החיוביים ויהי Z השלמים.

א. R^+ ו Z ניתנים להגדרה ב U
ב. R^+ ניתן להגדרה ב U אבל Z לא ניתן להגדרה ב U
ג. Z " " R^+ "
ד. R^+ ו Z אינם ניתנים להגדרה ב U

ד"ר משה קופל

לוגיקה מתמטית מועד א' סמ' ב' תשנ"ג

(3) יהי M אוסף כל המבנים הלא סופיים

א. M הוא EC

ב. M הוא EC_Δ (במובן הרחב) אבל לא EC

ג. M אינו EC_Δ

(4) "אם לקבוצת פסוקים Σ ~~אחת~~ לא קיים פסוק α כך ש $\Sigma \vdash_D \alpha$; $\Sigma \vdash_D \neg\alpha$ אז Σ ניתנת לסיפוק"

א. זה נכון לכל מערכת היסק D שלמה (אבל לא לכל מערכת היסק)

ב. זה נכון לכל מערכת היסק D נאותה

ג. זה לא נכון לשום מערכת היסק D

ד. זה נכון לכל מערכת היסק D

(5) יהי U המבנה משאלה 2. אזי לקבוצת הפסוקים Th U

א. יש מודל בן-מניה אבל אין מודל סופי

ב. יש מודל סופי אבל אין מודל לא סופי בן-מניה

ג. אין מודל בן-מניה (כולל סופי)

ד. יש מודל סופי ויש מודל לא-סופי בן-מניה

(6) תהי A קבוצת פסוקים ניתנת להכרעה כך ש (i) ל A אין מודלים סופיים (ii) A $\aleph_0$-קטגורית

א. $C_n A$ תורה ניתנת להכרעה

ב. $C_n A$ תורה ניתנת למניה רקורסיבית אבל לא להכרעה

ג. $C_n A$ תורה אינה ניתנת למניה רקורסיבית

ד. $C_n A$ אינה תורה

השאלה מועד ר

[illegible]

ד) שרה: יש לי אלגוריתם ~~[illegible]~~ ספור כל הפסוקים האמיתיים בתורת המספרים

חיים: יש לי אלגוריתם לבדוק אם פסוק אמת בתורת המספרים

א. שרה וחיים משקרים.

ב. חיים משקר, שרה לא בהכרח משקרת.

ג. שרה משקרת, חיים לא בהכרח משקר.

ד. שניהם לא בהכרח משקרים

25.3.90 בחינה בלוגיקה מתמטית I מועד ב', תש"ן

88-571

זמן הבחינה: שעתיים.

נא לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות. 46

1. א) להגדיר מתי מערכת אלגברית שלמה מבחינת כוח הביטוי.

ב) להגדיר מתי נוסחה φ היא תוצאה לוגית של קבוצת נוסחאות Γ (בשפה פסוקית כלשהי).

2. תהי L שפה פסוקית בעלת n ~~אטומים~~ פסוקים אטומיים $p_1, \dots, p_n$ (בלבד). הוכח שאם נוסחה φ של L היא תוצאה לוגית של קבוצת נוסחאות Γ אז יש תת-קבוצה Δ של Γ שמספר איבריה אינו עולה על 2^{2^n} וכך ש-φ תוצאה לוגית של Δ.

[רמז: לכל מודל M שבו φ שקרי בחר נוסחה ב-Γ השקרית באותו מודל.]

3. להוכיח שבשפה פסוקית עם הקשרים $\vee, \wedge, \top, \bot$ בלבד אין נוסחה המבטאת את פונקצית השלילה not (אפשר להניח שיש בשפה פסוק אטומי יחיד p).

[רמז: דרך אחת היא להראות שכל נוסחה בשפה מבטאת אחת מ-3 פונקציות האמת האחרות של מקום אחד, ובעזרת אינדוקציה על מבנה הנוסחה.]

4. תהי L שפה פסוקית ויהיו Γ, Δ קבוצות של נוסחאות מ-L. נסמן $\Gamma \models \Delta$ כאשר בכל מודל M לשפה שבו כל הנוסחאות ב-Γ אמיתיות לפחות אחת מהנוסחאות ב-Δ אמיתית.

להוכיח ש-$\Gamma \models \Delta$ אם"ם קיימות תת-קבוצות סופיות Γ_1 של Γ ו-Δ_1 של Δ כך ש-$\Gamma_1 \models \Delta_1$.

[רמז: כיוון אחד קל מההגדרות והשני מתבסס על משפט הקומפקטיות לקבוצת פסוקים מסוימת Z הבנויה מ-Γ, Δ. לבניית Z יש להניח שקשר השלילה מצוי בשפה. מדוע הנחה זו מותרת?]

~~[illegible]~~

דף 1 מתוך 2

25.3.90 בחינה בלוגיקה מתמטית I מועד ב', תש"ן

98-571

46

זמן הבחינה: שעתיים.

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות.

1. א) להגדיר מהי מערכת קשרים שלמה מבחינת כוח הביטוי.
ב) להגדיר מתי נוסחה φ היא תוצאה לוגית של קבוצת נוסחאות Γ (בשפה פסוקית כלשהי).

2. תהי L שפה פסוקית בעלת n ~~[illegible]~~ פסוקים אטומיים $p_1,\dots,p_n$. הוכח שאם נוסחה φ של L היא תוצאה לוגית של קבוצת נוסחאות Γ אז יש תת-קבוצה Δ של Γ שמספר איבריה אינו עולה על 2^n וכך ש-φ תוצאה לוגית של Δ.
[רמז: לכל מודל M שבו φ שקרי בחר נוסחה ב-Γ השקרית באותו מודל.]

3. להוכיח שבשפה פסוקית עם הקשרים $\vee, \wedge, \underline{f}, \underline{t}$ בלבד אין נוסחה המבטאת את פונקצית השלילה not (אפשר להניח שיש בשפה פסוק אטומי יחיד p).
[רמז: צריך אולי היה להראות שכל נוסחה בשפה מבטאת אחת מ-3 פונקציות האמת של משתנה אחד, וציין האינדוקציה על מבנה הנו

4. תהי L שפה פסוקית ויהיו Γ, Δ קבוצות של נוסחאות. נסמן $\Gamma \models \Delta$ כאשר בכל מודל M לשפה שבו כל הנוסחאות ב-Γ אמת לפחות אחת מהנוסחאות ב-Δ אמיתית.
להוכיח ש-$\Gamma \models \Delta$ אםם קיימות תת-קבוצות סופיות Γ_1 של Γ ו-Δ_1 של Δ כך ש-$\Gamma_1 \models \Delta_1$.

[רמז: כיוון אחד קל מההגדרות והשני מתבסס על משפט הקומפקטיות לקבוצת פסוקים מסוימת Z הבנויה מ-Γ, Δ. לבניית Z יש להניח שקשר השלילה מצוי בשפה. מדוע הנחה זו מותרת?]

בחינה בלוגיקה, מועד ב, 25.3.90

5. תהי A קבוצה ויהי $R \subseteq A^3$. נסמן בקיצור $[a,b,c]$ במקום $R(a,b,c)$ (או $(a,b,c) \in R$). R יקרא סידור מעגלי (מכוון) של A כאשר מתקיימים התנאים הבאים:

א) אם $[a,b,c]$ אז $a \neq b$.

ב) אם $[a,b,c]$ אז $[b,c,a]$.

ג) אם a, b, c שלושה איברים שונים של A אז $[a,b,c]$ או $[a,c,b]$.

ד) אם $[a,b,c]$ וגם $[a,c,d]$ אז $[a,b,d]$.

[דוגמה: $A = \{1,\dots,12\}$. היחס $[a,b,c]$ מתקיים כאשר a, b, c שונים ומחוג השעות של שעון תקין, לאחר שיפקוד את השעה a, יגיע לשעה b לפני שיגיע לשעה c. למשל, $[1,3,5]$, $[7,11,2]$, $[9,3,8]$ אך לא $[9,3,10]$.]

להוכיח שלכל קבוצה A קיים סידור מעגלי.

[רמז: השתמש בעובדה ש- A ניתנת לסידור ליניארי או במשפט הקומפקטיות של שפה פסוקית מתאימה.]

בהצלחה