47 25.3.90 בחינה בלוגיקה, מועד ב

5. תהי A קבוצה ויהי $R \subseteq A^3$. נסמן בקיצור $[a,b,c]$ במקום $R(a,b,c)$ (או $(a,b,c) \in R$). R יקרא סידור מעגלי (מכוון) של A כאשר מתקיימים התנאים הבאים:

א) אם $[a,b,c]$ אז $a \neq b$.

ב) אם $[a,b,c]$ אז $[b,c,a]$.

ג) אם a, b, c שלושה איברים שונים של A אז $[a,b,c]$ או $[a,c,b]$.

ד) אם $[a,b,c]$ וגם $[a,c,d]$ אז $[a,b,d]$.

[<u>דוגמה</u>. $A = \{1,\dots,12\}$. היחס $[a,b,c]$ מתקיים אמ"ם a,b,c שונים ומחוג השעות של שעון תקין, לאחר שיפקוד את השעה a, יגיע לשעה b לפני שיגיע לשעה c. למשל, $[1,3,5]$, $[7,11,2]$, $[9,3,8]$ אך לא $[9,3,10]$.]

להוכיח שלכל קבוצה A קיים סידור מעגלי.

[<u>רמז</u>: השתמשו בעובדה ש- A ניתנת לסידור ליניארי או במשפט הקומפקטיות של שפה פסוקית מתאימה.]

בהצלחה

86-521-01

6.2.89

בחינה בלוגיקה מתמטית I מועד א', תש"ן

48

זמן הבחינה: שעתיים.

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות.

1. להגדיר או לנסח:

א) מתי נאמר שפונקציה $f:A^n\to A$ ניתנת לביטוי במערכת אלגברית $\mathfrak{A}=\langle A,(G_i)_{i\in I}\rangle$.

ב) משפט הקומפקטיות, בניסוח המדבר על תוצאות לוגיות ("ניסוח ב'").

2. א) תהי $\mathfrak{A}=\langle A,(G_i)_{i\in I}\rangle$ מערכת אלגברית ותהי C תת-קבוצה של A סגורה תחת כל הפעולות G_i ($i\in I$). הוכח שאם t ביטוי (במערכת ביטויים מהטיפוס המתאים ל-$\mathfrak{A}$) ! α השמה שערכיה ב-C אזי $\|t\|_{\mathfrak{A},\alpha}\in C$.

ב) להראות שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}x$ ($x\in\mathbb{R}$) אינה ניתנת לביטוי במערכת $\mathbb{R}=\langle \mathbb{R};+,0,-,*,1\rangle$ (שדה הממשיים).

[רמז: תהי C קבוצת המספרים השלמים. השתמש ב-(א) ובהגדרת פונקציה ניתנת לביטוי.]

3. תהי L שפה פסוקית עם הפסוקים האטומיים p,q,r והקשרים $\to,\vee,\wedge,\sim$ (לפחות). להראות שהנוסחה

$$(p\to q)\wedge(\sim p\to r)$$

אינה שקולה לוגית לשום נוסחה הבנויה מ- r,q,p באמצעות הקשרים $\vee,\wedge$ בלבד, אבל שקולה לוגית לנוסחה הבנויה מהם באמצעות $\to,\vee,\wedge$ בלבד.

[רמז: הנוסחה הנדונה אמיתית במודל

p	q	r
0	0	1

ושקרית במודל המתקבל ממנו ע"י שינוי הערך של p מ-0 ל-1. הראה שבנוסחאות הבנויות ע"י $\vee,\wedge$ בלבד התנהגות כזאת לא תתכן.]

4. תהי L שפה פסוקית עם קשר השלילה ($\sim$) לפחות ונסמן ב- Γ,Δ קבוצות של פסוקים מ-L. נסמן $\models\Delta$ (קרי: "Δ תקפה במובן האיחודי (או הרחב)") כאשר בכל מודל M לשפה לפחות אחד מהפסוקים ב-Δ אמיתי. להוכיח רק צדה:

המשך שאלה 4 בעמוד הבא

5. יהי A קבוצה כלשהי, $f: A \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ קבוצת המספרים הממשיים). להוכיח שקיים סידור ליניארי $<$ של A כך שלכל שני איברים a, b של A:

$$f(a) < f(b) \Rightarrow a < b$$

($<$ שבאגף שמאל הוא הסדר הרגיל של הממשיים).

[<u>הערה:</u> אפשר, אם כי לא הכרחי, להיעזר במשפט הקומפקטיות ללוגיקה פסוקית. מי שמעדיף לא להיעזר בו רשאי להסתמך על העובדה שכל קבוצה ניתנת לסידור ליניארי.]

בהצלחה

<u>המשך שאלה 4 שלא נכנס בצילום:</u>

א) אם $\Gamma \subseteq \Delta$, $\models \Gamma$ אזי $\models \Delta$

ב) אם $\models \Gamma \cup \{\varphi\}$, $\models \Delta \cup \{\sim\varphi\}$ אזי $\models \Gamma \cup \Delta$ (φ פסוק כלשהו).

ג) אם $\models \Delta$ אזי יש $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית כך ש- $\models \Gamma$.

1. תהי K קבוצה כלשהי של השמות אמת על הפסוקים האטומיים $p_1,\dots,p_n$ (כלומר, K היא קבוצה של שורות בטבלת) הוכח שקיימת נוסחה פסוקית α כך ש $V(\alpha)=T$ אם ורק אם $V\in K$, וכן שב α מופיעים הקשרים $\{\neg,\wedge\}$ בלבד. (כלומר, הוכח ש $\{\neg,\wedge\}$ מהווה מערכת מספיקה)

2. התבונן בפסוקים:

i) $\overbrace{\forall x\,\exists y\,\forall z\ P(x,z)\to R(x,y,z)}^{\alpha}$

ii) $\overbrace{\forall x\,\forall z\,\exists y\ P(x,z)\to R(x,y,z)}^{\beta}$

מצא אינטרפרטציות I_1, I_2, I_3, I_4 כך ש

$\alpha^{I_1}=T,\ \beta^{I_1}=T$; $\alpha^{I_2}=T,\ \beta^{I_2}=F$

$\alpha^{I_3}=F,\ \beta^{I_3}=T$; $\alpha^{I_4}=F,\ \beta^{I_4}=F$

(רמז: יתכן שלא כולן קיימות)

200-88 / לוגיקה / ד"ר קופל משה תשנ"ה סמסטר א' מועד א'

3: i

א) מצא את הסקולמיזציה α_s של הפסוק α משאלה 2.

ב) איך צריך להרחיב את האינטרפרטציה I_1 שניתנה כדי שתהיה מודל גם ל α_s

ג) תאר את עולם הרברנד ואת קבוצת הבסיס של α_s

ii

כנ"ל עבור β משאלה 2.

4. הוכח שקבוצת הפסוקיות (clauses) הבאה אינה ניתנת לסיפוק:

$\{p(x,x), Q(F(x,z))\}$, $\{r(u,v), s(u,v,u), t(g(u))\}$,

$\{\neg s(g(c), w, y)\}$, $\{\neg p(c, z_1), \neg t(g(g(z_1)))\}$

$\{\neg Q(F(c,b))\}$, $\{\neg r(g(x_1), b)\}$

5. הוכח: אם לקבוצת הפסוקים Σ קיימים מודלים גדולים כרצוננו אז יש ל Σ מודל אינסופי. (רמז: הוכח שקבוצת הפסוקים $\Sigma \cup \{\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \bigwedge_{1\le i<j\le n} x_i \neq x_j \mid n=1,2,\dots\}$ ניתנת לסיפוק.)

לוגיקה מתמטית 88-200-01 ד"ר מלה קוהל תשנ"ה סמ' א מועד ב

52

1. תהי α הפסוק $\forall x \exists y \exists z\, a(x,y,z) \wedge b(x,z) \to \neg b(x,y)$

א. מצא מודל ל α

ב. מצא אינטרפרטציה של השפה שאינה מודל ל α

ג. מצא את הסקולמיזציה α_s של α

ד. מצא מודל ל α_s

ה. מהו עולם הרברנד של α_s ?

ו. מהו ~~קבוצ~~ בסיס הרברנד של α_s ?

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

2. נסח אחד מהמשפטים הבאים:

א. משפט הרברנד ב. משפט לוונהיים-סקולם

3. יהיה ד הטיעון הבא:

לכל מספר קיים מספר ~~שהוא~~ שהוא קטן ממנו.

אפס הוא מספר.

כל מספר חיובי אינו קטן מאפס.

לכן קיים מספר שאינו חיובי.

א. תרגם את ד לשפה מסדר ראשון. השתמש בפרדיקטים number(x), positive(x), $x<y$ וקבוע 0.

ב. מצא פסוק אוניברסלי ~~...~~ שאינו ניתן לסיפוק אם ורק אם ד הוא תקף (השתמש בסקולמיזציה)

ג. השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש ד הוא תקף

משך המבחן שעתיים וחצי!

בהצלחה!

זמן הבחינה: שעתיים. בחינה בלוגיקה מתמטית 88.372 20.6.89

יש לענות על שלוש מתוך חמש השאלות הבאות. סמסטר ב מועד ב

53

1. להגדיר או לנסח:

א) נכונות במובן החלש והחזק של מערכת דדוקטיבית בשפה פסוקית.

ב) $\varphi(t/x)$ (תוצאת ההצבה של t עבור x בנוסחה φ).

ג) תוצאה לוגית במובן החלש (רחב) והחזק (צר) בשפה מסדר ראשון.

2. לנמק בקצרה או להפריך כל אחת מהטענות הבאות, כאשר L שפה כלשהי מסדר ראשון

א) כל נוסחה ב- L שקולה לוגית לנוסחה שבה המשתנה v_5 אינו חופשי.

ב) כל נוסחה ב- L שקולה לוגית לנוסחה שבה v_5 אינו קשור.

ג) אם לפסוק φ של L יש מודל סופי אז יש ל- φ גם מודל אינסופי.

ד) אם לפסוק φ של L יש מודל אינסופי אז יש ל- φ שני מודלים לא איזומורפיים.

3. נתונה בשפה פסוקית עם שני אטומים p, q והקשר $\sim$ בלבד. תהי S המערכת הדדוקטיבית ב- L שכלל ההסק היחיד שלה הוא $\frac{\varphi}{\sim\sim\varphi}$.

א) הראה ש- S נכונה במובן החזק.

ב) האם S שלמה במובן החלש? ובמובן החזק?

ג) האם הוספת הכלל $\frac{\sim\sim\varphi}{\varphi}$ ל- S משנה את התשובות לשאלות הקודמות? אם כן, מה ההבדלים?

4. תהי L השפה מסדר ראשון עם הקבועים הלוגיים $\sim, \to, \forall, =$ ובלי אף קבועים לא-לוגיים (כלומר ללא סמלי פונקציות ויחסים).

א) להוכיח שאם $\mathfrak{A}=\langle A\rangle$, $\mathfrak{B}=\langle B\rangle$ מודלים לשפה L, ו- $|A|=|B|$ (כלומר קיימת התאמה חח"ע בין הקבוצות A ו B) אז $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ שקולים אלמנטרית.

ב) להראות שכל שני מודלים אינסופיים לשפה L שקולים אלמנטרית.

[רמז: שימוש ב-(א) ובמשפט לוונהיים סקולם היורד.]

54

בחינה בלוגיקה (מועד ב)

5. תהי L_0 השפה שתוארה בשאלה 4. להוכיח שלא קיים פסוק φ של L_0 כך שעבור כל מודל <u>סופי</u> $\mathcal{A}=\langle A\rangle$ לשפה: φ אמיתי ב- $\mathcal{A}$ אמם מספר איברי A זוגי.

[<u>רמז:</u> אם φ פסוק כזה מה אפשר לומר על קיום מודלים אינסופיים ל- φ ול- $\neg\varphi$?]

<u>הערה:</u> בפתרון תרגיל זה מותר להשתמש בתוצאות שאלה 4 גם אם לא פתרת אותה.

בהצלחה

[redacted] גבפר [redacted]

בחן 1 מתוך 2

ז׳ י׳ משה קוה ... סמסטר ב מועד ב תשמ"ז ... [redacted]

נג

לכל אחת מהשאלות בחר תשובה אחת, הדגש את תשובתך.
אפשר להסתמך על כל המשפטים שלמדנו בכתה

1. טענה I: אם Σ היא קבוצה (סופית או לא סופית) נתנת להכרעה של נוסחאות בלוגיקה פסוקית אז הקבוצה $S=\{\alpha \mid \Sigma \models \alpha\}$ נתנת להכרעה
טענה II: אם Σ כנ"ל אז קיימת Σ_0 סופית כך ש $S=\{\alpha \mid \Sigma_0 \models \alpha\}$

א) רק טענה I אמיתית ב) רק טענה II אמיתית
ג) שתי הטענות אמיתיות ד) שתי הטענות שקריות

2. אמיתות הנוסחה $\forall x \{x=y \to \exists y [P(x,y) \wedge P(y,x)]\}$ תלויה
א) במבנה ובהשמה ב) רק במבנה ג) רק בהשמה
ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

3. I: קבוצת המבנים K היא EC II: $Th\,K$ נתנת לאקסיומטיזציה סופית
א) I גורר II אבל II לא גורר I ב) II גורר I אבל I לא גורר II
ג) I אם ורק אם II ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

4. תהי N המספרים הטבעיים. תהי $\cdot$ הכפלה. תהי E הזוגיים ותהי P הראשוניים.
א) E נתנת להגדרה במבנה $\langle \cdot, N \rangle$ אבל P אינה נתנת להגדרה ב $\langle \cdot, N \rangle$
ב) P " E "
ג) E ו P נתנות להגדרה ב $\langle \cdot, N \rangle$ ד) E ו P אינן נתנות להגדרה ב $\langle \cdot, N \rangle$

5. תהי T תורה לא שלמה כך שכל המודלים של T בעוצמה $\aleph_0$ הם איזומורפיים.
א) אז ל T אין מודל סופי ב) אז ל T יש מודל סופי אחד ויחיד
ג) אז ל T יש יותר ממודל סופי אחד ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

דף 3 במסמך 2

לוגיקה מתמטית

סמ' ב' מועד א'

תשמ"ה

ד"ר משה קופל

המשך

6. תהי T תורה שלמה (בשפה L), תהי T קבוצה לא נתנת להכרעה.
תהי Σ תת-קבוצה נתנת להכרעה של T. אז:

א) $C_n\Sigma$ אינה שלמה (בשפה L)

ב) $C_n\Sigma$ אינה נתנת להכרעה

ג) $C_n\Sigma$ נתנת להכרעה

ד) כל התשובות הנ"ל אינן נכונות

1. לכל אחד מהטיעונים הבאים קבע אם הטיעון תקף או לא. הוכח.

58

א)

$$\begin{array}{l} A \to B \\ C \to B \\ \neg A \to C \\ \hline B \end{array}$$

ב)

$$\begin{array}{l} F \wedge (D \vee E) \\ F \to \neg(G \wedge E) \\ (H \wedge D) \to G \\ \neg H \to \neg F \\ \hline D \leftrightarrow G \end{array}$$

ג)

$$\begin{array}{l} Q \to R \\ R \to S \\ S \to T \\ \hline T \to Q \end{array}$$

ד)

$$\begin{array}{l} \neg(J \to (K \to L)) \\ J \to (K \to M) \\ \hline P \to M \end{array}$$

2. תרגם כל אחד מהטיעונים הבאים לסימנים.
(בונוס 5 נקודות [לכל אחד] - קבע אם הטיעון תקף. הוכח)

ה) מדינת ישראל תישאר מדינה דמוקרטית רק אם תישמר הזכות להפגין. אולם אם הזכות להפגין תישמר לממשלה יהיו הרבה מתנגדים, המונים יפגינו נגד הממשלה. אם המונים יפגינו נגד הממשלה תבוטל הזכות להפגין. א"כ מדינת ישראל תישאר מדינה דמוקרטית רק אם לממשלה לא יהיו הרבה מתנגדים.

ו) אם הקורס בלוגיקה לא יהיה קורס חובה אז או שקורס יותר גרוע יחליף אותו בקורס חובה או שהסטודנטים יוכרחו לבחור קורס בחירה נוסף. אם קורס יותר גרוע יחליף את הלוגיקה בקורס חובה אז הסטודנטים יתגעגעו ללוגיקה. אם הסטודנטים יוכרחו לבחור קורס בחירה נוסף כולם ילמדו לוגיקה. לכן אם הקורס בלוגיקה לא יהיה קורס חובה אז או שהסטודנטים ילמדו לוגיקה בכל זאת או שיתגעגעו ללוגיקה.

בהצלחה!

Logic Examination #2

Time: 3 hours

59

1. (a) Let $\varphi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n$ and let s be a truth assignment on $BRS(\varphi)$. Prove that $\bar{s}(\varphi) = T$ iff for all i in $\{1, \dots, n\}$ $\bar{s}(\psi_i) = T$.

   (b) Find how many different assignments on the Bloks $A_1, \dots A_n$ satisfy the following set of sentential formulas

   $$\{\neg A_1 \vee A_2,\ \neg A_2 \vee A_3,\ \dots,\ \neg A_i \vee A_{i+1},\ \dots,\ \neg A_{n-1} \vee A_n\}$$

   (c) Prove that $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ is not complete.

2. (a) Let μ be the term $(x+y)$ (where x and y are distinct variables). Let τ_1 be the term $(x \cdot y)$, and τ_2 be the term z (a variable different from x and y). Then compute

   $$\mu\,(x/\tau_1,\ y/\tau_2)$$

   $$\mu\,(y/\tau_2,\ x/\tau_1)$$

   (b) If φ is a formula in a first order logic language define

   (i) φ is valid

   (ii) φ is ~~[illegible]~~ a tautology

   (iii) $\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x)$ is a valid formula or is a tautology

   (c) Show that ~~[illegible]~~

   $$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$$

   is a valid formula.

3. (a) Define what is a derivation from T.

60 (b) Show that if $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ then $T \vdash \varphi \to \psi$

(c) Prove that $T \vdash \varphi$ iff $T \cup \{\neg\varphi\}$ is inconsistent.

4. (a) Define T complete. Show that if

$$T = \{\varphi : \mathcal{M} \models \varphi\}$$

then T is complete.

(b) Show that Group theory is incomplete.

(c) ~~Show that any T can be ex~~

(c) Show that if T is consistent then there is T' extending T, in the same language, such that T' is complete.

(Not use Gödel completeness theorem)

לוגיקה 88-200 תשנ"ג [redacted] סמ' א' מועד ג' בז 1 מערך 2

① אילו מהנוסחאות הבאות שקולות ל $(A \vee B) \to [(\neg C \vee C) \to \neg D]$
מרגאו'ס

א. $\neg(A \wedge D) \wedge \neg(B \wedge D)$ ב. $\neg(A \vee D) \vee \neg(B \vee D)$

ג. $\neg(A \vee B) \vee (\neg C \vee \neg D)$ ד. $\neg(A \vee B) \vee (C \vee \neg D)$

63

② תהי I אינטרפרטציה : $D_I = \{0,1,2,3,\dots\}$ $P_I(x,y) = \begin{cases} 1 & x \le y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

אילו מהפסוקים הבאים הם אמיתיים תחת האינטרפרטציה I ?

א. $\neg(\forall x \exists y \ \neg P(x,y))$ ב. $\neg(\forall y \exists x \ \neg P(x,y))$

ג. $\neg(\exists x \forall y \ \neg P(x,y))$ ד. $\neg(\exists y \forall x \ \neg P(x,y))$

③ יהי α הפסוק $\forall x \forall y \forall z \ [(P(x,y) \wedge P(y,z)) \to P(x,z)] \wedge [P(x,y) \to P(x,F(y))]$

אילו מהאינטרפרטציות הבאות הן מודלים ל α .

א. $D_I = \{\text{הממשיים}\}$ $P_I(x,y) = \begin{cases} 1 & x<y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ $F_I(y) = y + .7$

ב. $D_I = \{1,2\}$ $P_I(x,y) = \begin{cases} 1 & x=y=1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ $F_I(1) = 2$, $F_I(2) = 1$

ג. $D_I = \{1,2,3,\dots\}$ $P_I(x,y) = \begin{cases} 1 & x \text{ מחלק } y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ $F_I(y) = 2y$

ד. $D_I = \{\text{השלמים}\}$ $P_I(x,y) = \begin{cases} 1 & x \ge y-1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ $F_I(y) = y-3$

④ יהי α הפסוק $\forall x \exists y \ \neg(r(x) \to s(y)) \vee \forall x \ t(x)$

לאילו מהפסוקים הבאים ניתן להגיע מ α ע"י תהליך של "סקולמיזציה" ?

א. $\forall x \ (r(x) \vee t(x)) \wedge (\bar{s}(F(x)) \vee t(x))$ ב. $\forall x \forall z \ (r(x) \vee t(z)) \wedge (\bar{s}(c) \vee t(z))$

ג. $\forall x \forall z \ (r(x) \vee t(z)) \wedge (\bar{s}(F(x)) \vee t(z))$ ד. $\forall x \forall z \ (r(x) \vee t(z)) \wedge (\bar{s}(F(x,z)) \vee t(z))$

__הערה__ : בכל אחת מהשאלות הנ"ל כל תת-קבוצה מהתשובות המוצעות מהווה פתרון אפשרי (מאף אחת מהן ועד כולן)

שארון סגור

לוגיקה 200-89 תשנ"ג סמ' א' מועד ג'

מרצונים

① אילו מהנוסחאות הבאות שקולות ל $(A\vee B)\to[(\neg C\vee C)\to\neg D]$

א. $\neg(A\wedge D)\wedge\neg(B\wedge D)$

ב. $\neg(A\vee D)\vee\neg(B\vee D)$

ג. $\neg(A\vee B)\vee(\neg C\vee\neg D)$

ד. $\neg(A\vee B)\vee(C\vee\neg D)$

63

② תהי I אינטרפרטציה: $D_I=\{0,1,2,3,\dots\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & x\le y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

אילו מהפסוקים הבאים הם אמיתיים תחת האינטרפרטציה I?

א. $\neg(\forall x\exists y\ \neg P(x,y))$

ב. $\neg(\forall y\exists x\ \neg P(x,y))$

ג. $\neg(\exists x\forall y\ \neg P(x,y))$

ד. $\neg(\exists y\forall x\ \neg P(x,y))$

③ ויהי α הפסוק $\forall x\forall y\forall z\ [(P(x,y)\wedge P(y,z))\to P(x,z)]\wedge[P(x,y)\to P(x,f(y))]$

אילו מהאינטרפרטציות הבאות הן מודלים ל α.

א. $D_I=\{\text{הממשיים}\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & x<y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $f_I(y)=y+.7$

ב. $D_I=\{1,2\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & x=y=1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $f_I(1)=2$, $f_I(2)=1$

ג. $D_I=\{1,2,3,\dots\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & x \text{ מחלק } y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $f_I(y)=2y$

ד. $D_I=\{\text{השלמים}\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & x\ge y-1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $f_I(y)=y-3$

④ יהי α הפסוק $\forall x\exists y\ \neg(r(x)\to s(y))\vee\forall x\ t(x)$

לאילו מהפסוקים הבאים ניתן להגיע מ α ע"י תהליך של "סקולמיזציה"?

א. $\forall x\ (r(x)\vee t(x))\wedge(\bar{s}(f(x))\vee t(x))$

ב. $\forall x\forall z\ (r(x)\vee t(z))\wedge(\bar{s}(c)\vee t(z))$

ג. $\forall x\forall z\ (r(x)\vee t(z))\wedge(\bar{s}(f(x))\vee t(z))$

ד. $\forall x\forall z\ (r(x)\vee t(z))\wedge(\bar{s}(f(x,z))\vee t(z))$

הערה: בכל אחת מהשאלות הנ"ל כל תת-קבוצה מהתשובות המוצעות מהווה פתרון אפשרי (אף אחת מהן ועד כולן)

[illegible]

בדף במבחן
[illegible] משתנה

$$A \wedge B,\ B \to C,\ A \to (C \to D) \models D$$

סמ׳ א׳ מועד א׳

64

5) התבוננו בטיעון

הוכח ע״י <u>הכחשת</u> רזולוציה שהטיעון תקף

1. __________
2. __________
3. __________
4. __________
5. __________
6. __________
7. __________
8. __________
9. __________

) יהי α פסוק כך שצורתו בצורה פסוקית הוא:

$\{\bar{t}(z),\ s(z,v)\}$ $\{\bar{r}(x,c),\ t(f(f(y)))\}$ $\{\bar{t}(f(c))\}$

$\{r(x,y)\}$ $\{\bar{s}(f(w), d)\}$

הוכח ע״י הכחשת רזולוציה ש α אינו ניתן לסיפוק

1. __________
2. __________
3. __________
4. __________
5. __________
6. __________
7. __________
8. __________
9. __________
10. __________

הערה: קבועים: c, d

פונקציה: f

משתנים: v, w, x, y, z

בס"ד

מבחן לדוגמה 1: לוגיקה 88-200

65

1. לכל אחת מהנוסחאות הבאות קבע אם הנוסחה:

א) טאוטולוגיה ב) סתירה ג) אחרת

i. $[P\to(P\to Q)]\to(P\to Q)$ ii) $P\to(\neg P\to Q)$ iii) $\neg R\to(P\land\neg P)$

2. השתמש באלגוריתם רזולוציה כדי להוכיח שהטענה הבאה נכונה:

$$P\to Q,\ R\lor\neg Q,\ \neg(P\land R)\models\neg P$$

3. התבונן בטענה $\forall x\exists y\, P(x,y)\models\exists y\forall x\, P(x,y)$

א. הטענה נכונה אם ורק אם הפסוק $\alpha=$ ______ אינו ניתן לסיפוק.

ב. מצא את הסקולמיזציה של α לצורה פסוקית β. (צורה פסוקית = צורה אוניברסלית ו-CNF)

ג. אם β אינו ניתן לסיפוק הראה הוכחת רזולוציה.

ד. אם β ניתן לסיפוק מצא מודל לצד שמאל של הטענה המקורית שאינו מודל לצד ימין של הטענה.

4. כמו שאלה 3 עבור הטענה $\exists y\forall x P(x,y)\to\forall x\exists y P(x,y)$ ע.ב.

בס״ד

66

מבחן לדוגמה 2: לוגיקה.

1. הטענה $\{p, p\to r, r\to q\}\models p\wedge q$ נכונה
אם ורק אם הנוסחה $\alpha=$ ______________
אינה נתנת לסיפוק. הנוסחה α שקולה
לנוסחת ה-CNF $\beta=$ ______________
רשום ~~[illegible]~~ הפרכה רזולוציה לנוסחה ~~[illegible]~~ (עם סיבות):

1. ______________
2. ______________
3. ______________
4. ______________
5. ______________
6. ______________
7. ______________
8. ______________

2. יהי $\alpha=\forall x\exists y[R(x,y)\wedge R(f(x),y)]$ ויהי
$\beta=\exists y\exists x[R(x,y)\wedge R(f(x),y)]$

א) מצא אינטרפרטציה I כך ש $I(\beta)=1$
ו ~~[illegible]~~ $I(\alpha)=0$.

ב) השתמש ברזולוציה להוכיח ש-$(\alpha\to\beta)$
הוא תקף.

3. מצא מודל לפסוקים הבאים:

a) $(\forall x\exists y\exists z P(x,y,z))\wedge\forall x\forall y(P(x,x,y)\to\neg P(y,y,x))$

67

67

בס"ד

לוגיקה 88-200 תשנ"ח סמ' א' מועד א

פרופ' ארגליס

שאלון סגור

שאלון סגור

1. מה המספר של הנוסחות בלוגיקה פסוקית שאינן שקולות זו לזו עם בדיוק n משתנים?

א) n ב) $2n$ ג) 2^n ד) 2^{2^n} ה) אחרות

ד

2. בנו נוסחה α ב-CNF ונוסחה β ב-DNF שמתאימות ללוח האמת הבא:

A	B	C	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$\alpha = (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$

$$\beta = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

68

3. הטענה $\{A\to\neg(B\wedge D),\ \neg A\to\neg C,\ C,\ B,\ E\to D\}\models\neg E$

היא נכונה אם ורק אם הנוסחה

$\alpha=(A\to\neg(B\wedge D))\wedge(\neg A\to\neg C)\wedge C\wedge B\wedge(E\to D)\wedge E$ אינה נתנת לסיפוק

הנוסחה α שקולה לנוסחת ה-CNF

$$B=\{\underbrace{\{\neg A,\neg B,\neg D\}}_{C_1},\underbrace{\{A,\neg C\}}_{C_2},\underbrace{\{C\}}_{C_3},\underbrace{\{B\}}_{C_4},\underbrace{\{\neg E,D\}}_{C_5},\underbrace{\{E\}}_{C_6}\}$$

השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש-B היא סתירה.

1.	$\{A\}$	$Res_C(C_2,C_3)$
2.	$\{D\}$	$Res_E(C_5,C_6)$
3.	$\{\neg B,\neg D\}$	$Res_A(1,C_1)$
4.	$\{\neg B\}$	$Res_D(2,3)$
5.	$\square$	$Res_B(4,C_4)$
6.		
7.		
8.		

69

4 נק׳ מתוך 3

4. הטענה:

$$\{\forall y\exists x(R(y,x)\wedge(P(y)\leftrightarrow\neg P(x))),\ \forall x\forall y\forall z((R(x,y)\wedge R(y,z))\to R(x,z))\}\models\exists x\exists y(P(x)\wedge P(y)\wedge R(x,y))$$

היא נכונה אם ורק אם הנוסחה

$$\alpha=\forall y\exists x(R(y,x)\wedge(P(y)\leftrightarrow\neg P(x)))\wedge\forall x\forall y\forall z((R(x,y)\wedge R(y,z))\to R(x,z))\wedge\neg\exists x\exists y(P(x)\wedge P(y)\wedge R(x,y))$$

אינה ניתנת לסיפוק.

α היא סתירה אם ורק אם הנוסחה

$$B=\{\underbrace{\{R(y,f(y))\}}_{C_1},\underbrace{\{\neg P(y),\neg P(f(y))\}}_{C_2},\underbrace{\{P(y),P(f(y))\}}_{C_3},\underbrace{\{\neg R(v,w),\neg R(w,z),R(v,z)\}}_{C_4},\underbrace{\{\neg P(t),\neg P(r),\neg R(t,r)\}}_{C_5}\}$$

בצורה אוניברסלית היא סתירה. (השתמש בסימון קבוצות.)

השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש-B היא סתירה.

	פסוקית	סיבה
1.	C_1	הנחה
2.	C_2	"
3.	C_3	"
4.	C_4	"
5.	C_5	"
6.	$\{\neg R(f(m),z),R(m,z)\}$	$Res(1,4)$ $y\mapsto m$, $v\mapsto m$, $w\mapsto f(m)$
7.	$\{R(m,f(f(m)))\}$	$Res(1,6)$ $y\mapsto f(m)$, $z\mapsto f(f(m))$
8.	$\{\neg P(m),\neg P(f(f(m)))\}$	$Res(5,7)$ $t\mapsto m$, $r\mapsto f(f(m))$
9.	$\{P(f(m)),\neg P(m)\}$	$Res(3,8)$ $y\mapsto f(m)$
10.	$\{\neg P(m)\}$	$Res(2,9)$ $y\mapsto m$
11.	$\{P(y)\}$	$Res(3,9)$ $m\mapsto f(y)$
12.	$\square$	$Res(10,11)$ $y\mapsto m$

7C

5. תהי I אינטרפרטציה:

$U_I=\{0,1,2,\dots\}$, $P_I(x,y)=\begin{cases}1 & \text{אם } x<y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $E_I(x)=\begin{cases}1 & \text{אם } x \text{ זוגי}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

$f_I(m,n)=m+n$, $u_I=5$, $v_I=2$, $w_I=0$.

מצא הערכים הבאים:

a) $I(\forall x\forall y\, P(y,f(x,y)))=$ 0. (אם $x=0$, מקבלים "0")

b) $I(\forall z\, P(z,f(u,z)))=$ 1. ($\forall z(z<5+z)$ ✓)

c) $I(\forall x\forall y[(E(x)\wedge E(y))\to E(f(x,y))])=$ 1. (ברור)

d) $I(\forall x\forall y[(E(x)\wedge E(y))\to E(f(v,w))])=$ 1. ($v_I+w_I=2$)

e) $I(\forall x[P(w,x)\to\exists y(P(w,y)\wedge P(y,w))])=$ 0. (קח $x=1$ לדוגמה)

6. מצא מודלים לנוסחאות הבאות: (צ"ל מצא I כך ש

א) $\alpha=\forall x\exists y\exists z(P(x,y,z))\wedge\forall x\forall y(P(x,x,y)\to\neg P(y,y,x))$

$U_I=\{1,2\}$ P_I: $P_I(x,y,z)=\begin{cases}1 & \text{אם } (x,y,z)=(1,1,2) \text{ או } (x,y,z)=(2,1,2)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

ב) $\alpha=\forall x[(P(x)\leftrightarrow\neg P(f(x)))\wedge(Q(x)\leftrightarrow\neg Q(f(f(x))))\wedge\exists y(P(y)\wedge\neg Q(y))]$

$U_I=\{0,1,2,3\}$. f_I: $f_I(0)=1, f_I(1)=2, f_I(2)=3, f_I(3)=0$

P_I: $P_I(0)=P_I(2)=1$, $P_I(1)=P_I(3)=0$. Q_I: $Q_I(0)=Q_I(1)=1$, $Q_I(2)=Q_I(3)=0$.

27.3.97 71 ציון 35

לוגיקה מתמטית 88-200 סמ' א' מועד ב' תשנ"ז

① העבר לצורת CNF (מבלי לבנות טבלת אמת): $A \wedge C) \vee \neg(C \to (D \wedge E))$

② תהיינה

$$\alpha : \forall x \exists y \ \neg p(x,y) \to p(y,x)$$
$$\beta : \forall x \exists y \ p(x,y) \vee p(y,x) \vee p(x,x)$$

א. מצא מודל סופי ל-α שאינו מודל ל-β (אם ישנו)

ב. מצא מודל סופי ל-β שאינו מודל ל-α (אם ישנו)

③ בצע סקולמיזציה על הפסוק $\neg[(\exists x\, \alpha(x)) \to \forall u \exists y \forall x\, b(u,x,y)]$

④ השתמש בשיטת DAVIS-PUTNAM כדי להוכיח תקפותו של הטיעון

$$A \vee B,\ A \to C,\ \neg(D \vee B) \models D \to (C \wedge \neg B)$$

⑤ השתמש בהוכחת רזולוציה כדי להוכיח תקפותו של הטיעון

$$\forall x \exists y\ p(x,y) \to r(x),\ \forall z\ p(f(c),z),\ \forall z\ r(f(z)) \to h(z) \models h(c)$$

ענה על כל השאלות

בהצלחה!

צד 1 מתוך 4

76

תיק 85

בס"ד

לוגיקה 88-200 תשנ"ח סמ' א' מועד א

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

שאלון סגור

שאלון סגור

1. מה המספר של הנוסחות בלוגיקה פסוקית שאינן שקולות זו לזו עם בדיוק n משתנים?

א) n ב) $2n$ ג) 2^n ד) 2^{2^n} ה) אחר

2. בנו נוסחה α ב-CNF ונוסחה β ב-DNF שמתאימות ללוח האמת הבא:

A	B	C	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$\alpha =$ ____________________

$\beta =$ ____________________

77

ב מאיגוף

תיק 85

(2)

ב. הטענה $\{A \to \neg(B \wedge D), \neg A \to \neg C, C, B, E \to D\} \models \neg E$

היא נכונה אם ורק אם הנוסחה

$\alpha =$ ______________________ אינה ניתנת לסיפוק.

הנוסחה α שקולה לנוסחת ה-CNF

$\beta =$ ______________________.

השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש β היא סתירה.

1. ____________ 5. ____________

2. ____________ 6. ____________

3. ____________ 7. ____________

4. ____________ 8. ____________

78

4. הטענה:

$$\{\forall y \exists x (R(y,x) \land (P(y) \leftrightarrow \neg P(x))), \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \land R(y,z)) \rightarrow R(x,z))\} \models \exists x \exists y (P(x) \land P(y) \land R(x,y))$$

היא נכונה אם ורק אם הנוסחה:

$\alpha =$ ____________________

אינה ניתנת לסיפוק.

α היא סתירה אם ורק אם הנוסחה

$B = \{$ ____________________ $\}$

בצורה אוניברסלית היא סתירה. (השתמש בסימון קבוצות.)

השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש-B היא סתירה.

סיבה	פסוקית	
		1.
		2.
		3.
		4.
		5.
		6.

סיבה	פסוקית	
		7.
		8.
		9.
		10.
		11.
		12.

$\forall x (P(x) \land \neg P(\ldots))$

(4) 70 ... 85

5. תהי I אינטרפרטציה:

$U_I = \{0,1,2,\dots\}$, $P_I(x,y) = \begin{cases} 1 & x<y \text{ אם} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$, $E_I(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ זוגי אם} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

$f_I(m,n) = m+n$, $u_I = 5$, $v_I = 2$, $w_I = 0$.

מצא הערכים הבאים:

a) $I(\forall x \forall y\, P(y, f(x,y))) =$ ________.

b) $I(\forall z\, P(z, f(u,z))) =$ ________.

c) $I(\forall x \forall y [(E(x) \wedge E(y)) \to E(f(x,y))]) =$ ________.

d) $I(\forall x \forall y [(E(x) \wedge E(y)) \to E(f(v,w))]) =$ ________.

e) $I(\forall x [P(w,x) \to \exists y (P(w,y) \wedge P(y,w))]) =$ ________.

6. מצא מודלים לפסוקים הבאים: (ז"א מצא I כך ש...)

א) $\alpha = \forall x \exists y \exists z (f(x,y,z)) \wedge \forall x \forall y (P(x,x,y) \to \neg P(y,y,x))$

$U_I =$ ________ $P_I =$ ________

ב) $\alpha = \forall x [(P(x) \leftrightarrow \neg P(f(x))) \wedge (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(f(f(x)))) \wedge \exists y (P(y) \wedge \neg Q(y))]$

$U_I =$ ________ . $f_I =$ ________ .

$P_I =$ ________ . $Q_I =$ ________ .

4 מועד 1 83 בס"ד

תיק 85

לוגיקה 88-200 תשנ"ח סמ' א' מועד א

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

שאלון סגור

שאלון סגור

1. מה המספר של הנוסחות בלוגיקה פסוקית שאינן שקולות זו לזו עם בדיוק n משתנים?

א) n ב) $2n$ ג) 2^n ד) 2^{2^n} ה) אחרות

2. בנו נוסחה α ב-CNF ונוסחה β ב-DNF שמתאימות ללוח האמת הבא:

A	B	C	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$\alpha =$ ______________________

$\beta =$ ______________________

(ציון 85)

(2)

3. הטענה $\{A\to\neg(B\wedge D), \neg A\to\neg C, C, B, E\to D\}\models\neg E$

היא נכונה אם ורק אם הנוסחה

$\alpha=$ ______________________ . אינה ניתנת לסיפוק

הנוסחה α שקולה לנוסחת ה-CNF

$\beta=$ ______________________________ .

השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש β היא סתירה.

1. ____________ 5. ____________

2. ____________ 6. ____________

3. ____________ 7. ____________

4. ____________ 8. ____________

③

8 ב׳ צימוק 4 85

4. הטענה:

$\{\forall y\exists x(R(y,x)\wedge(P(y)\leftrightarrow\neg P(x))), \forall x\forall y\forall z((R(x,y)\wedge R(y,z))\to R(x,z))\} \models \exists x\exists y(P(x)\wedge P(y)\wedge R(x,y))$

היא נכונה אם ורק אם הנוסחה:

$\alpha=$ ______________________

אינה נתנת לסיפוק.

α היא סתירה אם ורק אם הנוסחה

$\beta=\{$ ______________________ $\}$

בצורה אוניברסלית היא סתירה. (השתמש בסימון קבוצות.)

השתמש ברזולוציה כדי להוכיח ש-β היא סתירה.

	פסוקית	סיבה
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		

$\forall x\,(P(x)\wedge\neg P(g(x)))$ $P(g(a))$

$\{P(a)\}$ $\{\neg P(g(x))\}$ $\neg P(a)$

④ 13

79

ב. תהי I אינטרפרטציה:

$U_I=\{0,1,2,\dots\}$, $P^{<}_I(x,y)=\begin{cases}1 & x<y \text{ אם}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $E_I(x)=\begin{cases}1 & \text{אם } x \text{ זוגי}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

$f_I(m,n)=m+n$, $u_I=5$, $v_I=2$, $w_I=0$.

מצא הערכים הבאים:

a) $I(\forall x\forall y\, P(y,f(x,y)))=$ ______.

b) $I(\forall z\, P(z,f(u,z)))=$ ______.

c) $I(\forall x\forall y[(E(x)\land E(y))\to E(f(x,y))])=$ ______.

d) $I(\forall x\forall y[(E(x)\land E(y))\to E(f(v,w))])=$ ______.

e) $I(\forall x[P(w,x)\to\exists y(P(w,y)\land P(y,w))])=$ ______.

ג.

מצא מודלים לנוסחאות הבאות: (ז"א מצא I כך ש...)

א) $\alpha=\forall x\exists y\exists z(f(x,y,z))\land\forall x\forall y(P(x,x,y)\to\neg P(y,y,x))$

$U_I=$ ______ $P_I=$ ______

ב) $\alpha=\forall x[(P(x)\leftrightarrow\neg P(f(x)))\land(Q(x)\leftrightarrow\neg Q(f(f(x))))\land\exists y(P(y)\land\neg Q(y))]$

$U_I=$ ______. $f_I=$ ______.

$P_I=$ ______. $Q_I=$ ______.

בס"ד

80

לוגיקה מתמטית 88-200 סמ' א' מועד ב'

ט"ד 85 שולחן | סגור שעתיים

צ3 7 מתוך 5

1) התבונן בקשר הבינרי $A|B$ המוגדר על ידי טבלת האמת הבאה:

A	B	$A\|B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

א) הוכח ש $\neg A$ שקולה ל $A|A$.

נק'

ב) הוכח ש $A\wedge B$ שקולה ל $\neg(A|B)$.

נק'

ג) הוכח ללא שימוש בטבלת אמת ש $A\wedge B$ שקולה ל $(A|B)|(A|B)$.

5 נק'

81

דף 2 מתוך 5

ד) לכל נוסחה α בלוגיקה פסוקית, קיימת נוסחה β הבנויה רק עם הקשר $|$ כך ש α שקולה ל β.

5 נק'

נכון / לא נכון

ה) לכל נוסחה α בלוגיקה פסוקית קיימת נוסחה β הבנויה רק עם הקשרים $\{\wedge,\vee\}$ כך ש α שקולה ל β.

5 נק'

נכון / לא נכון

82

פ3 צמתין 5

2) מצא נוסחה α ב-CNF השקולה לנוסחה:

$$(A \leftrightarrow (B \rightarrow C)) \wedge (A \leftrightarrow B) \wedge (A \leftrightarrow \neg C).$$

א) $\alpha =$ ____________________________ טו נק'

ב) השתמש ברזולוציה להוכיח ש-α היא סתירה. כו נק'

פסוקית	סיבה
1)	
2)	
3)	
4)	
5)	
6)	
7)	
8)	
9)	
10)	
11)	
12)	
13)	
14)	

1)

5 מתוך 4 (83) 83

3) התבונן בנוסחה:

$$\alpha = (\forall y \exists x (T(y,x) \wedge E(y) \leftrightarrow \neg E(x)) \wedge$$
$$\forall x \forall y \forall z ((T(x,y) \wedge T(y,z)) \rightarrow T(x,z)) \wedge$$
$$\forall x \neg \exists y (E(x) \wedge E(y) \wedge T(x,y))).$$

א) מצא קבוצת פסוקיות B כך ש α שקולה (13 נק') ל B.

$B = \{ \quad \}$

ב) השתמש ברזולוציה להוכיח ש B הינו סתירה. (נק')

	פסוקית	סיבה
1)		
2)		
3)		
4)		
5)		
6)		
7)		
8)		
9)		
10)		
11)		
12)		

(ג) דף 5 מתוך 5 84

5) מיין את הנוסחאות הבאות ל (I) תקפה (II) סתירה (III) אחרת

א) $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \wedge \exists x \exists y (\neg P(x) \wedge \neg Q(y))$ (5 נק')

תקפה / סתירה / אחרת

ב) $(\neg \exists x \exists y P(x,y)) \vee (\forall x P(x,x))$ (5 נק')

תקפה / סתירה / אחרת

ג) $(\neg \exists x P(x,x)) \vee (\forall x \forall y P(x,y))$ (5 נק')

תקפה / סתירה / אחרת

ד) $(\forall x P(x,x)) \wedge (\exists x \forall y (P(x,y) \wedge \neg P(y,x)))$ (5 נק')

תקפה / סתירה / אחרת

ה) $\forall x P(x,x) \wedge \forall y \exists x (P(x,y) \wedge \neg P(y,x))$ (5 נק')

תקפה / סתירה / אחרת