בעיות מתמטיות בהלכה ובמקורות היהדות

פרופ' דניאל הרשקוביץ, דיקן הפקולטה למתמטיקה בטכניון

בשנים האחרונות נעשים נסיונות לעריכת רפורמה בהוראת המדעים, כאשר הנטייה היא לעבור מהוראה תחומית להוראה בין-תחומית. שני תחומי ידע, אשר ממבט ראשון, אינם נתפסים כקשורים, הם התלמוד המתמטיקה. הרבה מן התלמידים תופסים את המתמטיקה כמקצוע תיאורטי, ובוודאי לא כמקצוע הנוגע לחיי ההלכה. בהרצאה זאת נביא ארבע דוגמאות, החל ממתמטיקה הנלמדת בבית הספר היסודי וכלה במתמטיקה הנלמדת באוניברסיטה, המראות עד כמה התחומים הנ"ל הם שלובים זה בזה. דוגמאות אלה הן אך מדגם קטן של עשרות סוגיות אחרות, והן לקוחות מעבודת הדוקטוראט של ד"ר שלמה חריר במסגרת המחלקה להוראת המדעים בטכניון, בהנחייתם של פרופ' דניאל הרשקוביץ מהפקולטה למתמטיקה ופרופ' אמריטוס שמואל אביטל מהמחלקה להוראת המדעים.

<u>דוגמה א' – ממוצעים משוקללים:</u>

הגמרא במסכת פסחים דף פ"ט עמוד ב' מתארת שותפות בהוצאות הסעודה של מספר אנשים. הגמרא אומרת כי רב פפא ורב הונא עשו שותפות בפת. בעוד רב הונא אוכל פרוסה אחת, אכל רב פפא ארבע פרוסות. מאחר ורב הונא כנראה לא היה מרוצה משותפות זאת, בה נאלץ לכסות חלק מהוצאות הארוחה של חברו, מספרת הגמרא כי לאחר מכן הלך רב הונא ועשה שותפות עם רבינא. לרוע מזלו של רב הונא התברר לו כי עד שאכל רב הונא פרוסה אחת, אכל רבינא שמונה פרוסות. הגמרא אומרת כי תגובתו של רב הונא היתה: "עדיף לי מאה פפא ולא רבינא אחד." בראיה שטחית נראית תגובה זאת כביטוי זעם גרידא, אך בחישוב פשוט נראה כי רב הונא אמר כאן אמירה מתמטית. בשותפות של רב הונא, האוכל פרוסה אחת, עם רבינא, האוכל שמונה פרוסות, יש לנו שני שותפים האוכלים בסך הכל תשע פרוסות. כל אחד מהם משלם, אם כן, עבור 4.5 פרוסות. מאחר ורב הונא אכל רק פרוסה אחת, נמצא שהוא שלם עבור 3.5 פרוסות שלא אכל. לעומת זאת, בשותפות של רב הונא, האוכל פרוסה אחת, עם מאה פפא, שכל אחד מהם אוכל ארבע פרוסות, יש לנו מאה ואחד שותפים האוכלים בסך הכל ארבע מאות ואחת פרוסות. כל אחד מהם משלם, אם כן, עבור $401/101=3.97$ פרוסות. מאחר ורב הונא אכל רק פרוסה אחת, נמצא שהוא שלם עבור 2.97 פרוסות שלא אכל, ואם כן הפסדו במקרה זה קטן יותר.

דוגמא ב' – חישוב נפחים:

חז"ל ידעו שהמספר π אינו רציונאלי, ושערכו המקורב הוא 3.14. הרמב"ם, בפירושו למשנה עירובין פרק א' משנה ד', אומר: "יחס קוטר העיגול להיקפו בלתי ידוע ואי אפשר לדבר עליו לעולם בדיוק ... אבל אפשר לשערו בקירוב ... והקירוב שמשתמשים בו אנשי המדע הוא: יחס אחד לשלושה ושביעית ... וכיון שזה לא יושג לגמרי אלא בקירוב, תפשו הם בחשבון גדול ואמרו: כל שיש בהיקפו 3 טפחים יש בו רוחב טפח, והסתפקו בזה בכל המדידות שהוצרכו להם בכל התורה." לצורך המשך חישובינו נשתמש, איפוא, בקירוב 3 למספר π. כעת, הכתוב במלכים א' פרק ז' פסוק כ"ג מתאר את המיכל שהוכן על ידי המלך שלמה בבית המקדש לצורך קידוש ידיהם ורגליהם של הכהנים. גובהו של המיכל היה חמש אמות, ושפתו של המיכל היתה עגולה בקוטר עשר אמות, ולכן בהיקף שלושים אמות, ככתוב: "ויעש את הים, מוצק: עשר באמה משפתו עד שפתו עגול סביב, וחמש באמה קומתו, וקו שלושים באמה, יסוב אותו סביב." המידע הכלול בפסוק זה אינו מספיק כדי לקבוע את צורתו של המיכל, שכן לתיאור בפסוק מתאימים גליל, חצי כדור, חרוט, חרוט קטום, וכן צורות משולבות אחרות. מידע נוסף, בדבר נפחו של המיכל, מופיע בגמרא במסכת עירובין דף י"ד עמוד א', שם נאמר: "ים שעשה שלמה היה מחזיק מאה וחמשים מקוה טהרה", דהיינו 450 אמות מעוקבות. לפי מידע זה מסתבר שאף לא אחת מהצורות שנמנו לעיל אינה מתאימה. נפחו של גליל בעל המידות הנ"ל הוא 375 אמות מעוקבות, נפחו של חצי כדור בעל המידות הנ"ל הוא 250 אמות מעוקבות, נפחו של חרוט בעל המידות הנ"ל הוא 125 אמות מעוקבות, ואילו נפחו של חרוט קטום בעל המידות הנ"ל הוא בין 125 לבין 375 אמות מעוקבות. אנו נזקקים לכן לנסות צורה משולבת. אם נבחר מיכל שחלקו התחתון הוא תיבה שגובהה x וחלקו העליון הוא גליל שגובהו $5-x$, הרי מנוסחת הנפח

$$10\cdot10\cdot x + 3\cdot5^2\cdot(5-x) = 450$$

נקבל $x=3$. אכן, הגמרא במסכת עירובין דף י"ד עמוד ב' אומרת כי "ים שעשה שלמה שלוש אמות תחתונות מרובעות ושתים עליונות עגולות."

דוגמא ג' – בעיות מקסימום ומינימום:

כידוע, ההלכה מחייבת שימוש בכלים נפרדים לבישולי בשר וחלב. מה הדין במקרה ואדם בשל בטעות תבשיל חלבי בכלי בשרי או להיפך? השולחן ערוך חלק יורה דעה סימן צ"ג סעיף א' אומר: "קדרה שבשל בה בשר לא יבשל בה חלב, ואם בישל בה בתוך מעת לעת - אסור בנותן טעם." רבי משה איסרלש, הרמ"א, בהגהתו על אתר מוסיף: "וצריך לשער כנגד כל הקדרה." משמעות דבריו של הרמ"א: התבשיל מותר

באכילה רק אם, למשל במקרה של תבשיל חלבי שבושל בטעות בכלי בשרי, יחס הבשר לחלב הוא פחות מאחד לששים. לצורך זה, ההתיחסות אל דפנות הכלי היא כאל בשר, בשל בליעה אפשרית של בשר בהן, ולכן התבשיל מותר אם נפח הקדרה (התבשיל) הוא פי ששים ומעלה מנפח מעטפת הכלי. הלכה זאת מעוררת שאלה מענינת: מה הן מידות הכלי המבטיחות יחס מקסימלי בין נפח התכולה לבין נפח מעטפת הכלי. בנושא זה כתב הפוסק רבי שלמה חלמא בספרו "ברכות בחשבון": "המצאתי בנדון זה כלל חדש אשר לא קדמני בו אדם מעולם: ... כלי אשר גובהה כחצי רוחבה, כל אשר תוסיף ברוחב הכלי יהיה המים שבתוכו פחותים הערך כנגד הדפנות, וכן להיפך: כל אשר תוסיף בגובה הכלי - פחות ערך ריבוי המים נגד הכלי. אלא: התמונה היותר מחזקת ריבוי המים הוא כלי שגובהה חצי רוחבה." תשובתו של רבי שלמה חלמא לשאלתנו היא, איפוא: יחס מקסימלי בין נפח התכולה לבין נפח מעטפת הכלי יושג בכלי שגובהו שווה למחצית רוחבו. רבי שלמה חלמא הגיע למסקנה זאת בדרך אמפירית. האשרור המתמטי לעובדה מושג באמצעות שימוש בחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי. אכן, פתחנו את הפונקציה ליחס הנ"ל הן עבור כלי שצורתו גליל והן עבור כלי שצורתו תיבה בעלת בסיס ריבועי. בשני המקרים הסתבר כי אכן נקודת קיצון של מקסימום מושגת עבור כלי שגובהו שווה למחצית רוחבו.

<u>דוגמא ד' – בעית ספיקה:</u>

ההלכה מחייבת שמקוה טהרה תכיל מים חיים (זורמים) ולא מים שאובים (מכונסים). מה דינו של בור של מים מכונסים שאמת מי גשמים זורמת דרכו ומזינה את תכולתו באופן שוטף? התשובה לכך ניתנת במשנה במסכת מקוואות פרק ג' משנה ג': "בור שהוא מלא מים שאובין והאמה נכנסת לו ויוצאה ממנו, לעולם הוא בפסולו, עד שיתחשב שלא נשתיר מן הראשונים שלשה לוגין." משמעות המשנה: המקוה יוכשר רק כאשר כמות המים המקוריים שתוותר בו לא תעלה על שלשה לוגים. נפחו של מקוה הוא 40 סאה. כל סאה היא 24 לוגים. במקוה ישנם, איפוא, 320 לוגים. המשנה מורה לנו, אם כך, שהמקוה יוכשר כאשר מי הגשמים ימהלו את המים השאובים ביחס של 1:319. נעיר כי מבחינה הלכתית ההתייחסות למי המקוה בכל רגע נתון היא כאל מים מהולים באופן הומוגני. מתי יושג היחס הדרוש? הנטיה הראשונית היא לומר כי יחס זה יושג כאשר כמות מי הגשמים שתזרום דרך המקוה תהיה פי 319 מכמות המים השאובים, דהיינו 12760 סאים, שהם כ187- מ"ק מים. זהו גם החישוב המופיע בביאור המשניות של רבי פנחס קהתי. למעשה, כמות זאת היא מעל ומעבר לדרוש. כדי לראות זאת, נשים לב שכל

זרימה של 40 סאה מי גשמים דרך המקוה מקטינה את כמות המים המקוריים במקוה לפחות פי 2. ברור שאחרי n מנות של מי גשמים בנות 40 סאה כל אחת, היחס בין מי הגשמים למים השאובים יהיה לפחות $1:2^n$. לכן, אחרי זרימה של 320 סאים, כבר נקבל שיחס מי הגשמים למים השאובים הוא לפחות 1:512. לאמיתו של דבר, כמות מי הגשמים הנדרשת להכשרת המקוה היא פחותה בהרבה גם מכך. בעיה זאת היא בעית ספיקה פשוטה הנפתרת באמצעות משוואה דיפרנציאלית באופן הבא: אם נסמן את כמות המים השאובים בזמן t כ-f(t), ואת הספיקה כ-J סאים בשניה, הרי כמות המים הנכנסים ויוצאים בזמן Δt היא $J\Delta t$, וריכוז המים השאובים בזמן t הוא f(t)/40. כמות המים השאובים היוצאים בזמן Δt היא $J\Delta t$ f(t)/40, והמשוואה הדיפרנציאלית המתקבלת היא:

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{J}{40} f(t)$$

הפתרון הכללי של המשוואה הוא $f(t) = C e^{-Jt/40}$. בהצבת תנאי ההתחלה f(0)=40 נקבל פתרון Jt=230, דהיינו צריכים 230 סאים בלבד, שהם כ-3.36 מ"ק מים.