מבחן מבא לתורת הקבוצות תשנ"ו סמ' א' מועד א' פייגלשטוק

זמן הבחינה: שעתיים

ענה על 4 מתוך 6 שאלות

1. מצא צורה נורמלית דיסיונקטיבית מיוחדת של התבנית:
$p\wedge\{[\neg(q\rightarrow r)]\vee[\neg(r\rightarrow q)]\}$.

2. תהי A קבוצה ויהיו $B,C\subseteq A$.
א. הוכח כי $P(B)\cup P(C)\subseteq P(B\cup C)$.
ב. הוכח כי $P(B)\cup P(C)=P(B\cup C)$ אם ורק אם או $B\subseteq C$ או $C\subseteq B$.

3. תהי $f:A\rightarrow B$ פונקציה מקבוצה A לקבוצה B, ותהי $g:B\rightarrow C$ פונקציה מקבוצה B לקבוצה C.
א. הוכח כי אם $g\circ f$ היא חח"ע אזי f היא חח"ע.
ב. תן דוגמא שבה $g\circ f$ היא חח"ע, אבל g איננו חח"ע.

4. יהי $E\subseteq A\times A$ יחס על קבוצה A.
א. הוכח כי אם E סימטרי אזי $E\circ E$ הוא סימטרי.
ב. תן דוגמא שבה E איננו סימטרי, אבל $E\circ E$ הוא סימטרי.

5. תהי $Z=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$ קבוצת המספרים השלמים. מצא פונקציה $f:Z\rightarrow Z$ כך ש- $(Z,f,0)$ היא מערכת פיאנו.

6. יהיו $x=[n,m],y=[n',m']\in Z$. הוכח כי אם $x+y=x$ אזי $y=0$. (מותר להיעזר רק בהגדרת החיבור ב-Z, ובכל התכונות של ω).

בהצלחה!

2 [redacted]

מבחן   מבא לתורת הקבוצות   תשנ"ו   סמ' א'   מועד ב'   פייגלשטוק

זמן הבחינה: שעתיים

ענה על 4 מתוך 6 שאלות

1. מצא צורה נורמלית קוניונקטיבית מיוחדת של התבנית $(p\leftrightarrow q)\vee r$.

2. תהי A קבוצה ויהיו $B,C\subseteq A$. הוכח כי $P(B)\setminus P(C)\subseteq P(B\setminus C)$ אם ורק אם או $B\subseteq C$ או $B\cap C=\emptyset$.

3. תהי $f:A\to B$ פונקציה מקבוצה A לקבוצה B, ותהי $g:B\to C$ פונקציה מקבוצה B לקבוצה C.
   א. הוכח כי אם $g\circ f$ היא על אזי g היא על.
   ב. תן דוגמא שבה $g\circ f$ היא על, אבל f איננו על.

4. יהי $E\subseteq A\times A$ יחס על קבוצה A.
   א. הוכח כי אם E טרנזיטיבי אזי $E\circ E$ הוא טרנזיטיבי.
   ב. תן דוגמא שבה E איננו טרנזיטיבי, אבל $E\circ E$ הוא טרנזיטיבי.

5. יהי $0\neq n\in\omega$. נגדיר $n^0=1$ ו- $n^{k+1}=n\cdot n^k$ לכל $k\in\omega$. הוכח כי $n^k\cdot n^m=n^{k+m}$ לכל $k,m\in\omega$.

6. יהיו $x=[n,m],y=[n',m']\in Z$. הוכח כי אם $x<0$ ו- $y<0$ אזי $xy>0$.

בהצלחה!

88-103

(3)

מבחן   מבא לתורת הקבוצות 2   תשנ"ו   מועד א'   פייגלשטוק

~~זמן הבחינה: שעתיים.~~

ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר.

1. יהיו α,β חתכי דידקינד. הוכח כי אם $\alpha<\beta$ אזי $-\beta<-\alpha$.

2. תהי $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$=מעגל עם רדיוס 1 . מצא פונקציה $f:C\to[0,1]$ שהיא חח"ע ועל.

3. יהיו A,B קבוצות. הוכח כי אם $|B|\not\leq|A|$ אזי $|B|<|A|$.

4. א. יהי α מספר קרדינלי. הוכח כי $\alpha^2=\alpha\cdot\alpha$.
   ב. מצא מספרים קרדינלים $\alpha>1,\beta>1$ ו- γ המקיימים $\beta>\gamma$ אבל $\alpha^\beta=\alpha^\gamma$.

5. תהי A קבוצה עם יחס סדר חלקי $\leq$. תהי $S=\{B\subseteq A \mid$ היחס $\leq$ הוא מלא על $B\}$, ז"א אם $b_1,b_2\in B\in S$ אזי או $b_1\leq b_2$ או $b_2\leq b_1$. הוכח כי קיים איבר מכסימלי M ב- $\{S,\subseteq\}$, דהיינו, $M\in S$, ולכל $B\in S$ אם $M\subseteq B$ אזי $B=M$.

6. תהי A קבוצה סדורה היטב:
   א. תהי $B\subseteq A$ המקיימת: לכל $a\in A$, $s(a)\subseteq B \Rightarrow a\in B$. הוכח כי $B=A$.
   ב. בעזרת א. הוכח כי אם $f:A\to A$ היא פונקציה חח"ע, על, ושומרת סדר אזי f היא פונקית הזהות על A.

בהצלחה!

4

מבחן   מבא לתורת הקבוצות 2   תשנ"ו   מועד ב'   פייגלשטוק

זמן הבחינה: שעתיים.
ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר.

1. יהי $\alpha \geq 0$ חתך דידקינד. הוכח כי $1^*\cdot\alpha=\alpha$.

2. תהי $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<x\leq 3, 2<y\leq 3\}$. מצא פונקציה $f:B\to[0,1]$ חח"ע ועל.

3. א. תהי A קבוצה. הוכח כי $|A|<|\mathcal{P}(A)|$ כאשר $\mathcal{P}(A)$ היא קבוצת העוצמה של A.
ב. תהי $\mathcal{S}=\{X \mid$ X היא קבוצה$\}$. הוכח בעזרת א. כי $\mathcal{S}$ איננה קבוצה.

4. א. יהיו α,β,γ מספרים קרדינלים שונים מ- 0. הוכח כי $(\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$.
ב. תהי C קבוצה אינסופית. הוכח כי $|\mathcal{P}(C)|=|\{1,2,3,4\}^{C}|$. ניתן להניח כי $|C|+|C|=|C|$.

5. יהי $\mathbb{R}$=המספרים הממשיים, ותהי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ סדורה חלקית, עם יחס הסדר $\subseteq$. נתון כי $\emptyset\in\mathcal{S}$, ולכל אוסף $\{A_i\in\mathcal{S}\mid i\in I\}$ נתון כי $\bigcup_{i\in I}A_i\in\mathcal{S}$. תהי $\mathcal{T}=\{A\in\mathcal{S}\mid 0\in A\}$. הוכח כי קיים איבר מכסימלי ב- $\mathcal{T}$.

6. יהי α סודר (מספר אורדינלי). הוכח כי $\alpha\cdot 2=\alpha+\alpha$.

בהצלחה!

5

88-102

מבחן מבוא לתורת הקבוצות 1 סמ' א' מועד א' תשנ"ז פייגלשטוק

זמן המבחן: שעתיים

ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר.

1. מצא צורה נורמלית דיסיונקטיבית מיוחדת עבור התבנית $p\wedge \neg[q\wedge r\wedge(r\rightarrow q)]$.

2. תהי A קבוצה ויהיו $\{A_i \mid i=1,2,3,\ldots\}$ קבוצות חלקיות של A. תהי $B_1=A_1$ ולכל $n>1$ תהי $B_n=A_n\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)$. הוכח כי:
   א. $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$. ו- ב. $B_i\cap B_j=\emptyset$ לכל $i\neq j$.

3. תהי $f:A\rightarrow B$ פונקציה. הוכח כי f היא חח"ע אם ורק אם $f^{-1}[f(A_1)]=A_1$ לכל קבוצה חלקית $A_1\subseteq A$.

4. יחס $\sim$ הוא אנטי-סימטרי אם $\sim\cap\sim^{-1}\subseteq 1_A$. יהי $\sim$ יחס שקילות על A. הוכח כי $\sim$ הוא אנטי סימטרי אם ורק אם $\tilde{a}=\{a\}$ לכל $a\in A$.

5. יהי $a=[n,m]\in\mathbb{Z}$ המקיים $a^2=1=[1,0]$. הוכח כי או $a=1=[1,0]$ או $a=-1=[0,1]$.

6. יהי $q=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ המקיים $0<q<1$. הוכח כי $q^2<q$.

בהצלחה!

18 (6)

מבחן מבא לתורת הקבוצות 1 תשנ"ז מועד ב' פייגלשטוק
זמן הבחינה: שעתיים
ענה על 4 מתוך 6 שאלות.

1. מצא צורה נורמלית קוניונקטיבית מיוחדת של התבנית $\neg p\vee[q\wedge r\wedge(r\to q)]$.

2. יהיו $A_1,\dots,A_n\subseteq A$. הוכח כי $\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)'=\bigcap_{i=1}^{n}A_i'$ בלי להסתמך על חוק דה-מורגן.

3. תהי $f:A\to A$ פונקציה שאיננה חח"ע.
   א. הוכח כי לכל פונקציה $g:A\to A$ הפונקציה $g\circ f$ איננה חח"ע.
   ב. מצא דוגמא של פונקציה $g:A\to A$ כך ש- $f\circ g$ היא חח"ע.

4. יהי E יחס על קבוצה A. יהי $E^1=E$ ולכל טבעי n, יהי $E^{n+1}=E^n\circ E$. יהי $n>1$ מספר טבעי, ויהיו $a,b\in A$. הוכח כי $(a,b)\in E^n$ אם ורק אם קיימים $a_1,\dots,a_{n-1}\in A$ כך ש- $(a,a_1),(a_1,a_2),\dots,(a_{n-2},a_{n-1}),(a_{n-1},b)\in E$. רמז: הוכח באינדוקציה על n.

5. הוכח כי ω סדורה היטב.

6. יהיו $x,x_1,x_2\in\mathbb{Z}$ כך ש- $x_1<x_2$
   א. הוכח כי $x+x_1<x+x_2$.
   ב. הוכח כי אם $x,x_1,x_2>0$ אזי $x\cdot x_1<x\cdot x_2$.

בהצלחה!

7

102 תק

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן המעביר חומר עזר לרעהו
או רמז מילולי ייענש בחומרה

88-102-01

מבוא לתורת הקבוצות 1 מועד א' תשנ"ח פייגלשטוק

זמן הבחינה: שעתיים
ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר.

1. נתונה התבנית $P=\neg[p\to(\neg q\vee\neg r)]$.
   א. מצא צורה דיסיונקטיבית מיוחדת עבור P.
   ב. פשט את P בעזרת החוקים הבסיסיים של לוגיקה, והחוק $Q\to R\Leftrightarrow\neg Q\vee R$.

2. יהיו A,B קבוצות. הוכח כי $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$ וכי $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$ אם ורק אם $A=\emptyset$ או $B=\emptyset$.

3. יהי E יחס על קבוצה A. נגדיר $E^1=E$ ו- $E^{n+1}=E^n\circ E$ לכל n טבעי. הוכח כי E טרנזיטיבי אם ורק אם $E^n\subseteq E$ לכל n טבעי.

4. יהיו A, B קבוצות.
   א. הוכח כי קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to B$ אם ורק אם קיימת פונקציה על $g:B\to A$.
   ב. הוכח כי אם קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to B$ אזי קיימת פונקציה חח"ע $\bar{f}:P(A)\to P(B)$.

5. יהיו $n,m\in\omega$ כך ש- $m\leq n$. הוכח כי קיים $k\in\omega$ כך ש- $n=m+k$.

6. יהי $x=[n,m]\in\mathbb{Z}$. הוכח כי $x^2\geq 0=[0,0]$ וכי $x^2=0$ אם ורק אם $x=0$.

בהצלחה!

8 -102-01

8

תיק 102

102

מבוא לתורת הקבוצות 1 מועד ב' תשנ"ח פייגלשטוק

זמן הבחינה: שעתיים
ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר.

1. בלוח אמת הבא, ערך אחד חסר.

p	q	r	
T	T	T	T
T	T	F	
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

מצא שתי תבניות לוגיות P_1, P_2 עם לוח אמת הנ"ל כך ש- $P_1 \not\Leftrightarrow P_2$, ומלא את המקום החסר עבור P_1 ועבור P_2.

2. יהיו A, B קבוצות.
א) הוכח כי $\mathcal{P}(A\setminus B) \subseteq [\mathcal{P}(A)\setminus \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$.
ב) מצא קבוצות A, B כך ש- $\mathcal{P}(A\setminus B) \neq [\mathcal{P}(A)\setminus \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$ והראה שאין שויון.

3. יהי E יחס שקילות על קבוצה A, ויהי F יחס שקילות על קבוצה B. תהי $G=\{((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \mid (b_1,b_2)\in F \text{ ו- } (a_1,a_2)\in E\}$. הוכח כי G הוא יחס שקילות על $A\times B$.

4. יהיו A, B קבוצות לא ריקות:
א) הוכח כי קיימת פונקציה חח"ע $g: A \to A\times B$.
ב) הוכח כי אם קיימת פונקציה חח"ע $f: A \to B$ אזי קיימת פונקציה חח"ע $\hat{f}: A\times B \to A\times B$.

5. הוכח כי ω סדורה היטב.

6. יהיו $x=[a,b],\ y=[c,d] \in \mathbb{Z}$. הוכח כי $x+y \rangle x$ אם ורק אם $y\rangle[0,0]$.

בהצלחה!

(9)

מבחן בתורת הקבוצות 1 88-102-01, מועד א', ה תשנ"ט. המרצה: א' שמואל דהרי.
המבחן בשני חלקים. בחלק א' שלש שאלות ובחלק ב' ארבע שאלות. יש לענות לפחות לחמש שאלות כששאלה 1 בחלק א' ושאלה 4 בחלק ב' הן שאלות חובה. אין חמר עזר.

חלק א' (שאלה 1 היא שאלת חובה!). משך חלק זה: 140 דקה.

1) יהיו V קבוצה, $X := \{(A,R,B) : A,B \subseteq V \,,\, R \subseteq A\times B\}$. נגדיר יחס $\le$ מעל X ע"י:
לכל $(A_1,R_1,B_1),(A_2,R_2,B_2)\in X$ $\quad (A_1,R_1,B_1)\le(A_2,R_2,B_2) \overset{\text{def}}{\iff} R_1\subseteq R_2$.

א) הוכיחו כי $\le$ רפלקסיבי מעל X וטרנזיטיבי.

ב) נגדיר יחס $\equiv$ מעל X ע"י: לכל $(A_1,R_1,B_1),(A_2,R_2,B_2)\in X$
$(A_1,R_1,B_1)\equiv(A_2,R_2,B_2) \overset{\text{def}}{\iff} (A_1,R_1,B_1)\le(A_2,R_2,B_2)\wedge(A_2,R_2,B_2)\le(A_1,R_1,B_1)$.
הוכיחו כי $\equiv$ שקילות מעל X.

נסמן ב $[A,R,B]$ את מחלקת השקילות של (A,R,B) לגבי $\equiv$.
תהי $\pi : X \to X/_{\equiv}$ ההעתקה הטבעית ותהי $\pi\times\pi : X\times X \to X/_{\equiv}\times X/_{\equiv}$ מוגדרת ע"י:
לכל $x,y\in X$ $\quad (\pi\times\pi)(x,y)=(\pi(x),\pi(y))$.
נגדיר $f : X\times X\to X$ ע"י: $f((A,R,B),(C,S,D)) := (C, R\circ S, B)$.

ג) הוכיחו כי אם $(A_1,R_1,B_1)\le(A_2,R_2,B_2)$, $(C_1,S_1,D_1)\le(C_2,S_2,D_2)$ אז
$f((A_1,R_1,B_1),(C_1,S_1,D_1))\le f((A_2,R_2,B_2),(C_2,S_2,D_2))$.

ד) הוכיחו כי קימת $g : X/_{\equiv}\times X/_{\equiv}\to X/_{\equiv}$ כך ש $g\circ(\pi\times\pi)=\pi\circ f$.

2) כל הקבוצות בשאלה זו הן תת קבוצות של קבוצה נתונה X.
לכל $U,A,V\subseteq X$ נגדיר: $U\,|\,A\,|\,V := (U\cap A^c)\cup(V\cap A)$.

א) הוכיחו כי אם $U_1\subseteq U_2$, $V_1\subseteq V_2$ אז $U_1\,|\,A\,|\,V_1\subseteq U_2\,|\,A\,|\,V_2$.

ב) הוכיחו כי $U\cap V\subseteq U\,|\,A\,|\,V\subseteq U\cup V$ וכי $U\,|\,A\,|\,V=V\,|\,A^c\,|\,U$.

ג) יהיו $Q:=U\,|\,A^c\,|\,V$, $P:=U\,|\,A\,|\,V$. הוכיחו כי $P\,|\,A^c\,|\,Q=V$, $P\,|\,A\,|\,Q=U$.

3) תהי a קבוצה.

א) הוכיחו כי אם b_1,b_2 קבוצות טרנזיטיביות כך שלכל $j:=1,2$:
1) $a\subseteq b_j$; 2) לכל קבוצה טרנזיטיבית c : $a\subseteq c\Rightarrow b_j\subseteq c$;
אז $b_1=b_2$.

ב) נגדיר אינדוקטיבית סדרה $(a_n)_{\aleph}$ ע"י: $a_1:=a$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ $a_{n+1}:=\bigcup a_n$. תהי $b:=\bigcup_{\aleph} a_n$
(שימו לב לסימונים השונים של האחוד!). הוכיחו כי: b (קבוצה) טרנזיטיבית, $a\subseteq b$, ולכל קבוצה טרנזיטיבית c : $a\subseteq c\Rightarrow b\subseteq c$. רמז לשלב האחרון: די להוכיח כי לכל $\vdots$ $\;\ddots\subseteq\cdots$.

בהצלחה

10

מבחן בתורת הקבוצות 1 88-102-01, מועד א׳, ה תשנ״ט. המרצה: א׳ שמואל דהרי.
המבחן **בשני חלקים**. בחלק א׳ שלש שאלות ובחלק ב׳ ארבע שאלות. יש לענות לפחות לחמש שאלות כששאלה 1 בחלק א׳ ושאלה 4 בחלק ב׳ הן **שאלות חובה**. אין חמר עזר.

חלק ב׳ (שאלה 4 היא שאלת חובה!). משך חלק זה: 140 דקה.

4) יהיו A,B קבוצות. נגדיר $p_1 : A\times B \to A$, $p_2 : A\times B \to B$ ע״י: לכל $(a,b)\in A\times B$
$p_1(a,b):=a$, $p_2(a,b):=b$.

א) הוכיחו כי **לכל** קבוצה Y **ולכל** $f_1 : Y \to A$, $f_2 : Y \to B$ **קַיֶּמֶת** פונקציה **יחידה** $f : Y \to A\times B$ כך שֶ $p_1 \circ f = f_1$, $p_2 \circ f = f_2$.

ב) יהיו X קבוצה, $q_1 : X \to A$, $q_2 : X \to B$ כך ש**לכל** קבוצה Y **ולכל** $f_1 : Y \to A$, $f_2 : Y \to B$ **קַיֶּמֶת** פונקציה **יחידה** $f : Y \to X$ כך שֶ $q_1 \circ f = f_1$, $q_2 \circ f = f_2$
הוכיחו כי **קַיֶּמֶת** פונקציה **יחידה** $\varphi : X \to A\times B$ כך שֶ $p_1 \circ \varphi = q_1$, $p_2 \circ \varphi = q_2$, וכי **קַיֶּמֶת** פונקציה **יחידה** $\psi : A\times B \to X$ כך שֶ $q_1 \circ \psi = p_1$, $q_2 \circ \psi = p_2$.

ג) בסימונים ובהנחות של השלבים הקודמים, נעַיֵּן בפונקציות
$\psi \circ \varphi : X \to X$, $\varphi \circ \psi : A\times B \to A\times B$.

הוכיחו כי:
$$q_1 \circ (\psi \circ \varphi) = q_1 (= q_1 \circ \mathrm{id}_X) , \quad q_2 \circ (\psi \circ \varphi) = q_2 (= q_2 \circ \mathrm{id}_X) ;$$
$$p_1 \circ (\varphi \circ \psi) = p_1 (= p_1 \circ \mathrm{id}_{A\times B}) , \quad p_2 \circ (\varphi \circ \psi) = p_2 (= p_2 \circ \mathrm{id}_{A\times B}) .$$
הסיקו כי $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{A\times B}$, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$.
מה נובע מִכאן עבור φ , ψ ?

5) יהיו X קבוצה, $A \subseteq X$, S קבוצה **מסֻיֶּמֶת** של פונקציות מֵ X לְ $[0,1]$, T קבוצת **כל** הפונקציות מֵ S לְ $[0,1]$. לכל $a\in A$, $f\in S$ נגדיר $\hat{a}(f) := f(a)$.

א) נַמקו בקצור מדוע $\hat{a} \in T$.
ב) תהי $\hat{} : A \to T$ הפונקציה המוגדרת ע״י: לכל $a\in A$ $\hat{}(a) := \hat{a}$. **מִצאו** תנאי הכרחי ומספיק שעל S לקַיֵּם כך שהפונקציה $\hat{}$ תהיה חד חד עֶרכית **והוכיחו** כי תנאי זה אכן הכרחי ומספיק לכך!

6) א) יהיו $f : A \to B$, $x_1, x_2 \in A$ כך שֶ $x_1 \neq x_2$ אבל $f(x_1) = f(x_2)$. תהי $C := \{x_1, x_2\}$.
הַגדירו $g_1, g_2 : C \to A$ כך שֶ $g_1 \neq g_2$ אבל $f \circ g_1 = f \circ g_2$.

ב) $f : A \to B$ נקראת **מונו׳** אם **לכל** קבוצה C **ולכל** $g_1, g_2 : C \to A$
$f\circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$.
הוכיחו כי f מונו׳ אם ורק אם f חד חד ערכית.

7) תהי $f : X \to Y$. הוכיחו כי f היא על Y אם ורק אם קַיֶּמֶת $h : Y \to X$ כך שֶ $f \circ h = \mathrm{id}_Y$.

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שיִמצאו ברשותו חומרי
עזר אסורים או יִתָּפס בהעתקה
יֵענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה!

ב ה צ ל ח ה!

11

25

מבחן בתורת הקבוצות 1 88-102-01, מועד ב', ה תשנ"ט. המרצה: א' שמואל דהרי.
המבחן **בשני חלקים**. בחלק א' שלש שאלות ובחלק ב' ארבע שאלות. יש לענות **לפחות לחמש** שאלות כששאלה 1 בחלק א' ושאלה 4 בחלק ב' הן **שאלות חובה**. אין חמר עזר.

חלק א' (שאלה 1 היא שאלת חובה!). משך חלק זה: 140 דקה.

1) א) יהיו $R \subseteq Y \times Y$, $E := \bigcap\{W : R \subseteq W \ \wedge \ Y$ שקילות מעל $W\}$.
הוכיחו כי E שקילות מעל Y, $R \subseteq E$, ולכל שקילות W מעל Y כך שֶ $R \subseteq W$ מתקיֵם $E \subseteq W$.
שימו לב: בהמשך השאלה מנצלים את **כל** התוצאות של סעיף זה!

ב) יהיו $f,g : X \to Y$, $R := \{(f(x),g(x)) : x \in X\}$, ויהי E מתקבל מֵ R כמו בחלק א'. יהיו $Y/_E$ קבוצת המנות המתאימה, $\pi : Y \to Y/_E$ העתקת המנות. **הוכיחו** כי $\pi \circ f = \pi \circ g$.

ג) בסימונים ובהנחות של חלק ב' תהי $h : Y \to Z$ כך שֶ $h \circ f = h \circ g$.
הוכיחו כי $R \subseteq K(h)$ **והסיקו** כי $E \subseteq K(h)$ (**כזכור**:
$K(h) := \{(a,b) \in Y \times Y : h(a) = h(b)\}$ ז"א: $a\,K(h)\,b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a,b \in Y \wedge h(a) = h(b)$).

ד) בסימונים ובהנחות של החלקים הקודמים **הוכיחו** כי קיֶמת פונקציה יחידה $h' : Y/_E \to Z$ כך שֶ $h' \circ \pi = h$.

2) $L \subseteq P(X)$ לא ריקה נקראת **סָריג** (או שָׂריג) אם לכל $E,F \in L$: $E \cup F, E \cap F \in L$.

א) תהי $S \subseteq P(X)$ לא ריקה. **הוכיחו** כי
אם L_1, L_2 סְריגים כך שלכל $j := 1,2$:
(1) $S \subseteq L_j$ (2) אם T סריג וְ $S \subseteq T$ אז $L_j \subseteq T$;
אז $L_1 = L_2$.

ב) תהי $S \subseteq P(X)$ לא ריקה. נגדיר רקורסיבית (=נגדיר אינדוקטיבית) סדרה $(S_n)_{\mathbb{N}}$ ע"י:
$S_1 := S$
ולכל $n \in \mathbb{N}$ $S_{n+1} := \{E \cup F, E \cap F : \exists i,j \le n (E \in S_i \wedge F \in S_j)\}$.
תהי $L := \bigcup_{\mathbb{N}} S_n$. **הוכיחו** כי: L סריג, $S \subseteq L$, ואם T סריג כך שֶ $S \subseteq T$ אז $L \subseteq T$.

3) יהיו a,b,c,d קבוצות (לאו דוקא שונות). **הוכיחו** כי
$\{a,b\} = \{c,d\} \Rightarrow (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$.

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שיִמָצאו ברשותו חומרי
עזר אסורים או יִתָפס בהעתקה
יֵעָנֵש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה!

ב ה צ ל ח ה !

12

מבחן בתורת הקבוצות 1 88-102-01, מועד ב', ה תשנ"ט. המרצה: א' שמואל דהרי.
המבחן **בשני חלקים**. בחלק א' שלש שאלות ובחלק ב' ארבע שאלות. יש לענות **לפחות לחמש** שאלות כששאלה 1 בחלק א' ושאלה 4 בחלק ב' הן **שאלות חובה**. אין חמר עזר.

חלק ב' (שאלה 4 היא שאלת חובה!). משך חלק זה: 140 דקה.

4) יהיו A,B קבוצות, $Z:=(A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})$ (כמובן $0\neq 1$ ...). נגדיר $j_1:A\to Z$, $j_2:B\to Z$ ע"י: לכל $a\in A$ $j_1(a):=(a,0)$ ולכל $b\in B$ $j_2(b):=(b,1)$.

א) **הוכיחו כי** $(A\times\{0\})\cap(B\times\{1\})=\varnothing$.

ב) **הוכיחו כי** אם $f_1:A\to Y$, $f_2:B\to Y$ אז **קֶיֶמֶת** פונקציה **יחידה** $f:Z\to Y$ כך שֶ $f\circ j_1=f_1$, $f\circ j_2=f_2$. הֵיכן מְיַשמים את חלק א'?

ג) נתונות קבוצה X ופונקציות $T_1:A\to X$, $T_2:B\to X$ כך שלכל קבוצה Y ופונקציות $f_1:A\to Y$, $f_2:B\to Y$ קֶיֶמֶת פונקציה **יחידה** $f:X\to Y$ כך שֶ $f\circ T_1=f_1$, $f\circ T_2=f_2$.

הוכיחו כי קֶיֶמֶת פונקציה **יחידה** $\phi:Z\to X$ כך שֶ $\phi\circ j_1=T_1$, $\phi\circ j_2=T_2$ וכי קֶיֶמֶת פונקציה **יחידה** $\psi:X\to Z$ כך שֶ $\psi\circ T_1=j_1$, $\psi\circ T_2=j_2$.

ד) **הוכיחו כי**

$$(\phi\circ\psi)\circ T_1=T_1\ (=id_X\circ T_1)\quad,\quad(\phi\circ\psi)\circ T_2=T_2\ (=id_X\circ T_2)\ ;$$
$$(\psi\circ\phi)\circ j_1=j_1\ (=id_Z\circ j_1)\quad,\quad(\psi\circ\phi)\circ j_2=j_2\ (=id_Z\circ j_2)\ .$$

ה) **הסיקו כי** $\phi\circ\psi=id_X$, $\psi\circ\phi=id_Z$.
מה נובע מכאן עבור ϕ , ψ ?

5) יהיו $f:X\to Y$, $(E_i)_I$ משפחת תת קבוצות של X כך שלכל $i,j\in I$ **שונים** $E_i\cap E_j=\varnothing$. לכל $i\in I$ תהי $g_i:E_i\to Y$. נגדיר $h:X\to Y$ ע"י:

לכל $x\in X$ $$h(x):=\begin{cases} g_i(x) & \text{if } \exists i\in I\,(x\in E_i)\\ f(x) & \text{if } x\in X\setminus\bigcup_I E_i\end{cases}\ .$$

א) מדוע h פונקציה? (סעיף זה **אינו** קשור לסעיף ב').

ב) **הוכיחו כי** לכל $S\subseteq Y$ $h^{-1}[S]=\left(f^{-1}[S]\setminus\bigcup_I E_i\right)\cup\bigcup_I g_i^{-1}[S]$.

6) תהי Z קבוצת **כל** הפונקציות **החלקיות** מֵ X לְ Y . לכל $g\in Z$ תהי $B_g:=\{f\in Z: g\le_r f\}$.

א) **הוכיחו כי** אם $g_1\le_r g_2$ (באשר $g_1,g_2\in Z$) אז $B_{g_2}\subseteq B_{g_1}$.

ב) תהי $f\in B_{g_1}\cap B_{g_2}$. **הוכיחו כי** $\mathrm{dom}(g_1)\cup\mathrm{dom}(g_2)\subseteq\mathrm{dom}(f)$, וכי לכל $x\in\mathrm{dom}(g_1)\cap\mathrm{dom}(g_2)$ $g_1(x)=g_2(x)$. **רמז:** מהם $f|_{\mathrm{dom}(g_1)}$, $f|_{\mathrm{dom}(g_2)}$?

ג) תהי $f\in B_{g_1}\cap B_{g_2}$. **הגדירו** $g\in Z$ כך שֶ $f\in B_g\subseteq B_{g_1}\cap B_{g_2}$. **רמז:** הֵעזרו בסעיפים הקודמים, בחרו $\mathrm{dom}(g):=\mathrm{dom}(g_1)\cup\mathrm{dom}(g_2)$.

7) תהי $f:X\to Y$. **הוכיחו כי** f חד חד ערכית $\Leftrightarrow$ קֶיֶמֶת $g:Y\to X$ כך שֶ $g\circ f=id_X$.
אם באיזשהו שלב מסתמכים על כך שֶ X אינה ריקה נא לכתב זאת!

ועדת המשמעת מזהירה
נבחן שֶיִמָצאו ברשותו חומרי
עזר אסורים או יִתָפֵס בהעתקה
יֵעָנֵש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה !

ב ה צ ל ח ה !

13

מבוא לתורת הקבוצות 1 (תשס"ב מועד א)

מספר קורס: 07-102-88
מרצה: בועז צבאן
מתרגל: מתן שנידרמן
תאריך הבחינה: 6.8.2002 למ'
משך הבחינה: שעה וחצי
חומר עזר: אין
הנחיות:

* ענה על **שלוש שאלות בלבד** מתוך ארבע השאלות שלפניך.
* כתוב בצורה ברורה, על גבי מחברת הבחינה.
* יש להתחיל כל שאלה בדף חדש.
* ניתן להשתמש בסוף המחברת כטיוטה.
* והכי חשוב, אל תידאגו. חישבו על המבחן כעל תשבץ היגיון או פאזל מעניין ונסו ליהנות ממנו!

שאלה 1. א. הגדר את הפונקציות הבאות באינדוקציה על שפת תחשיב הפסוקים $\mathcal{L}$:

(1) מספר הבלוקים בפסוק α.

(2) ה n הגדול ביותר כך שהבלוק A_n מופיע ב α.

ב. מדוע ניתן להגדיר פונקציות באינדוקציה על $\mathcal{L}$?

ג. בדוק איזה מהפסוקים הבאים הוא טאוטולוגיה:

(1) $(A_3 \to (((\neg A_2) \to A_2) \to A_2))$.

(2) $(A_3 \to ((A_1 \to A_2) \wedge ((\neg A_2) \vee A_1)))$.

שאלה 2. א. הגדר: n-פיסקה (עבור n נתון), צורה קוניונקטיבית נורמלית (צק"נ).

ב. הוכח שלכל פסוק $\alpha \in \mathcal{L}$ שאינו טאוטולוגיה קיים פסוק α' בצק"נ כך ש $\alpha \Leftrightarrow \alpha'$.

ג. השתמש בדרך ההוכחה של המשפט מסעיף (ב) כדי למצוא את הצק"נ של הפסוק $(A_1 \to (A_2 \vee A_3))$.

ד. הוכח שהשפה $\mathcal{L}_{\{\neg,\vee,\wedge\}}$ שלמה.

שאלה 3. נתונה המערכת $\mathbb{N}$ של מספרים טבעיים, עם יחס סדר $<$ וחיבור $+$.

א. תאר (בלי הוכחות) את:

(1) הגדרת המערכת $\mathbb{Z}$ של המספרים השלמים,

(2) יחס הסדר $<_{\mathbb{Z}}$, החיבור $+_{\mathbb{Z}}$ של שלמים, הכפל $\cdot_{\mathbb{Z}}$ של שלמים, והחיסור - של שלמים.

הסבר מדוע ניתן להגדיר את היחס והפונקציות כמו שהגדרת, ותאר (בלי הוכחה) שיכון של $\mathbb{N}$ בתוך $\mathbb{Z}$.

ב. חזור על התהליך עבור בניית הרציונלים $\mathbb{Q}$ בעזרת השלמים $\mathbb{Z}$ (כאן יש להגדיר גם חילוק).

ג. הגדר את הישר הממשי $\mathbb{R}$ בעזרת $\mathbb{Q}$, ותאר את היחס $<$ והפונקיות חיבור, נגדי, וכפל של ממשיים. תאר שיכון של $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$.

ד. למה אנו מתכוונים כאשר אנו אומרים ש $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$? תן שתי תשובות אפשריות.

14

שאלה 4. תהי X קבוצה כלשהי, ותהי $g{:}X\to X$ פונקציה כך שהפונקציה המצומצמת $g|_{im(g)}$ היא חד-חד ערכית.

א. נגדיר יחס $\sim$ על X לפי:

$$.x_1 \sim x_2 \iff g(x_1)=g(x_2)$$

הוכח שהיחס $\sim$ הוא יחס שקילות על X.

ב. נגדיר פונקציה $f{:}X/\sim\ \to X/\sim$ על ידי $f([x]):=[g(x)]$. הוכח שהפונקציה f מוגדרת היטב.

ג. הוכח שהפונקציה f הנ"ל היא חד-חד ערכית.

ד. הוכח שאם X קבוצה סופית, אז f הנ"ל היא "על".

ה. תן דוגמא שבה f הנ"ל אינה "על".

בהצלחה!

15

מבוא לתורת הקבוצות 1 (תשס"ב מועד ב)

402
מספר קורס: 88-191-07
מרצה: בועז צבאן
מתרגל: מתן שנידרמן
תאריך הבחינה: 11/6/02
משך הבחינה: שעה וחצי
חומר עזר: אין (ואין צורך)
הנחיות:

* ענה על שלוש שאלות בלבד מתוך ארבע השאלות שלפניך.
* כתוב בצורה ברורה, על גבי מחברת הבחינה.
* יש להתחיל כל שאלה בדף חדש.
* ניתן להשתמש בסוף המחברת כטיוטה.
* והכי חשוב, אל תידאגו. חישבו על המבחן כעל תשבץ היגיון או פאזל מעניין ונסו ליהנות ממנו!

שאלה 1. א. להלן פונקציות המוגדרות באינדוקציה על השפה $\mathcal{L}$ של תחשיב הפסוקים, כאשר A_n יכול להיות כל בלוק, $\alpha,\beta\in\mathcal{L}$, ו $@\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,|\}$ קשר בינרי:

$$\begin{array}{rcl} F(A_n) & = & 0 \\ F((\alpha@\beta)) & = & F(\alpha)+F(\beta)+1 \\ F((\neg\alpha)) & = & F(\alpha)+1 \end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{rcl} G(A_n) & = & 1 \\ G((\neg\alpha)) & = & G(\alpha)+3 \\ G((\alpha@\beta)) & = & G(\alpha)+G(\beta)+3 \end{array} \qquad (2)$$

הסבר מדוע הגדרה כזאת אפשרית, ותאר מה מחשבת כל פונקציה (נא קצר דבריך).

ב. הוכח את הטענות הבאות עבור פסוקים $\alpha,\beta\in\mathcal{L}$:

(1) אם α טאטולוגיה ו $\alpha\Rightarrow\beta$, אז גם β טאוטולוגיה.

(2) אם β סתירה ו $\alpha\Rightarrow\beta$, אז גם α סתירה.

שאלה 2. א. תאר את השלבים העיקריים (פרט ככל האפשר) בהוכחת משפט השירבוב עבור לוגיקה פסוקית:

נניח ש $\gamma\Rightarrow\beta$, וכן $BKS(\alpha)\cap BKS(\beta)=\{A_1,\dots,A_m\}$ (כאשר $1\leq m$).

אזי קיים פסוק α כך ש $BKS(\alpha)\subseteq\{A_1,\dots,A_m\}$ ומתקיים $\alpha\Rightarrow\beta$ וכן $\gamma\Rightarrow\alpha$.

ב. השתמש בדרך ההוכחה של משפט השירבוב כדי למצוא פסוק α בצק"נ עם $BKS(\alpha)\subseteq\{A_1,A_2\}$, כך שמתקיים $A_1\wedge(A_2\vee A_3)\wedge(A_3\rightarrow A_2)\Rightarrow\alpha\Rightarrow((A_1\wedge A_2)\vee(A_1\wedge A_4))\wedge(A_4\rightarrow A_2)$.

ג. הוכח שהשפה $\mathcal{L}_{\{\neg\}}$ אינה שלמה.

16

שאלה 3. א. הגדר את המספרים הרציונלים $\mathbb{Q}$ בעזרת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$:

(1) הגדר את היחס הרלוונטי $\sim_{\mathbb{Q}}$ והוכח שהוא יחס שקילות.

(2) הגדר את הקבוצה $\mathbb{Q}$.

(3) הגדר את יחס הסדר ואת הפונקציות חיבור, חיסור, כפל וחילוק של רציונלים, והוכח שההגדרות טובות.

(4) תאר שיכון של $\mathbb{Z}$ בתוך $\mathbb{Q}$, והוכח שזהו אכן שיכון.

ב. מהו עיקרון החסם העליון?

(1) האם $\mathbb{Q}$ מקיימת עיקרון זה?

(2) האם $\mathbb{R}$ מקיימת עיקרון זה?

אם לא - הסבר מדוע; אם כן - הוכח.

שאלה 4. א. הוכח את הזהויות הבאות בין קבוצות:

(1) $A\triangle A=\emptyset$.

(2) $A\triangle B=B\triangle A$.

(3) $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$.

ב. תהי X קבוצה, ויהי $\mathcal{I}\subseteq P(X)$ אוסף לא ריק של קבוצות עם התכונות הבאות:

(א) $\emptyset\in\mathcal{I}$.

(ב) לכל $A,B\in\mathcal{I}$ מתקיים $A\triangle B\in\mathcal{I}$.

נגדיר יחס $\sim$ על $P(X)$ לפי:

$$A\sim B \Leftrightarrow A\triangle B\in\mathcal{I}.$$

הוכח ש $\sim$ יחס שקילות על $P(X)$.

בהצלחה!

17

שאלון סגור

מבחן סופי בקורס מבוא לתורת הקבוצות (תשס"ג מועד ב, 10.9.03 למ')

88-102-06

מרצה: ד"ר בועז צבאן, המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת בר-אילן. מתרגל: יניב בר-לב.

משך הבחינה: שעתיים (לא תינתן הארכה). הבחינה היא ללא חומר עזר.

הנחיות:
- יש לענות על שלוש שאלות בדיוק מתוך ארבע השאלות הנתונות.
- אין הכרח לענות על סעיפי בונוס כדי לקבל ציון 100. הניקוד על סעיפי הבונוס נמוך משמעותית מהניקוד על סעיפי החובה בשאלה, לכן לא מומלץ לבחור שאלה על פי סעיפי הבונוס שלה.
- בתשובה על סעיף מסויים מותר להשתמש בסעיפים הקודמים. ייתכנו סעיפים שהתשובה עליהם קצרה מאד.
- יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש, ולסמן כל סעיף בתשובה בבירור.

1. יהיו $\langle A,R\rangle$ ו $\langle B,S\rangle$ סדרים טובים איזומורפיים.

א. הוכח שלכל $x\in A$, $\overset{x}{A}\ncong A$.

ב. הוכח שלכל שני איברים שונים $x,y\in A$ מתקיים $\overset{x}{A}\ncong\overset{y}{A}$.

ג. הוכח שלכל $b\in B$, $\overset{b}{B}\ncong A$.

ד (בונוס). יהי $f:A\to B$ איזומורפיזם סדר, ויהא $a\in A$. נסמן $g=f|_{\overset{a}{A}}$, ו $b=f(a)$. הוכח ש $g:\overset{a}{A}\to\overset{b}{B}$ איזומורפיזם סדר.

2. א. הוכח שסודר α הוא גבולי אם ורק אם $\alpha=\sup\{\xi : \xi<\alpha\}$.

ב. הוכח שהסודר ω הוא גבולי.

ג. הוכח שלכל n טבעי, $n\cdot\omega=\omega$. (מותר להיעזר בתכונות של מספרים טבעיים.)

ד (בונוס). הראה, בעזרת (ג), שכפל סודרים אינו חילופי (קומוטטיבי).

ה (בונוס). הוכח את **עיקרון האינדוקציה על** ω: אם $X\subseteq\omega$, ומתקיים $0\in X$ וכן לכל $n\in X$ גם $S(n)\in X$, אז $X=\omega$.

3. א. הוכח שלכל מונה אינסופי κ מתקיים $\kappa\otimes\kappa=\kappa$.

ב. הוכח שניתן לחלק את $\mathbb{N}$ לאינסוף קבוצות זרות, שכל אחת מהן אינסופית.

ג. יהיו κ,λ מונים אינסופיים. הוכח: $\kappa\oplus\lambda=\kappa\otimes\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$.

ד (בונוס). תהא X קבוצה בת-מניה.

(i) הוכח שלכל $n>0$ טבעי, הקבוצה X^n היא בת מניה.

(ii) הוכח שאוסף הסדרות הסופיות של איברים ב X הוא בן-מניה.

4. א. הוכח, בעזרת עיקרון הסדר הטוב, את הלמה של Zorn.

ב. תהא $\mathcal{F}$ קבוצה של קבוצות כך שלכל שרשרת C של קבוצות ב $\mathcal{F}$, $\bigcup C\in\mathcal{F}$. הוכח, בעזרת הלמה של צורן, שיש $A\in\mathcal{F}$ שהיא מקסימלית ביחס להכלה (כלומר אין $B\in\mathcal{F}$ כך ש $A\subset B$).

ג. תהא A קבוצה עם יחס סדר חלקי R. תהא $S=\{B\subseteq A : \langle B,R\rangle \text{ סדר קוי}\}$. הוכח שקיים ב S איבר M שהוא מקסימלי ביחס להכלה $\subseteq$ (כלומר $M\in S$ ולכל $B\in S$, אם $M\subseteq B$ אז $B=M$).

ד (בונוס). הוכח, בעזרת הלמה של Zorn, את אקסיומת הבחירה.

בהצלחה !