מדור תורה ומדע

לענין π אצל טומאת אוהל

בפרשתנו אומרת התורה:

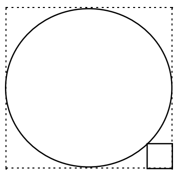
״זאת התורה אדם כי ימות באֹהל, כל הבא אל האֹהל וכל אשר באֹהל יטמא שבעת ימים״ [במד׳ יט יד].

מכאן לומדים חז״ל את דין טומאת אוהל, שמשמעותה לענייננו היא: אדם, כלים או אוכל המצויים עם דבר טמא תחת גג אחד - נטמאים. יש לסייג זאת בהגבלה הבאה: דין טומאת אוהל קיים כאשר יש באוהל חלל של טפח על טפח ברום טפח. אם אין באוהל חלל כזה, הטומאה שבאוהל נקראת ״טומאה רצוצה״, ובניגוד לטומאת אוהל (שבו יש חלל טפח) המתפשטת בחלל האוהל ולא מחוצה לו, במקרה זה אין הטומאה מתפשטת בחלל האוהל, אלא כל מי שעובר מעל מקום הדבר הטמא או מתחתיו - נטמא.

במשנה [אהלות י״ב ז׳] מצינו את המימרא הבאה:

״עמוד שהוא מוטל לאויר, אם יש בהיקפו עשרים וארבעה טפחים - מביא את הטומאה תחת דפנו, ואם לאו - טומאה בוקעת ועולה, בוקעת ויורדת״.

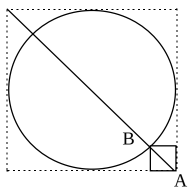
התנא מדבר בעמוד עגול וקובע, שאם יש בהיקפו 24 טפחים, יש חלל טפח תחת העמוד, כדלקמן:



[הציור הוא חתך רוחב של עמוד כאשר הוא מוטל לאורכו על הארץ]

במקרה זה, הטומאה נחשבת כמצויה באוהל, ולכן מתפשטת תחת דופן העמוד בלבד. אולם, אם אין בהיקף העמוד 24 טפחים - אין חלל טפח תחת העמוד, ולכן הטומאה נחשבת כ״טומאה רצוצה״, ואז היא מטמאת את שמעליה ואת שמתחתיה.

על דרך הפשט, נבין שיעור זה כך: אם בהיקף העמוד יש 24 טפחים, יש ברוחבו 8 טפחים (על פי הכלל ״כל שיש בהיקפו שלושה טפחים - יש בו רוחב טפח״ [עירובין דף י״ג ע״ב], כלומר: היחס בין היקף עיגול לקוטרו הוא 3). לכן אלכסון הריבוע שחוסם את העמוד הוא $8\times1\frac{2}{5}=11\frac{1}{5}$ טפחים (שכן קוטר העיגול הוא רוחב הריבוע, ואז אפשר להשתמש בכלל ״כל אמתא בריבועא - אמתא ותרי חומשי באלכסונא״ [עירובין דף ע״ו ע״ב], שמשמעו: היחס בין אלכסון ריבוע לצלעו הוא $1\frac{2}{5}$):



ומכאן, אורך הקטע AB הוא $\frac{11\frac{1}{5}-8}{2}=\frac{8}{5}$ טפח, ולכן אפשר לחסום תחת העמוד ריבוע בגודל טפח על טפח (שהרי אלכסון של ריבוע בגודל טפח על טפח הוא $\frac{7}{5}$ טפח). (נעיר כי השיעורים שהשתמשנו כאן הם השיעורים המקורבים הנקובים בגמרא במספר מקומות, בעוד שכיום ידועים ערכים מדויקים יותר לגדלים אלה: היחס בין היקף מעגל לקוטרו הוא $\pi=3.1415...$, והיחס בין צלע ריבוע לאלכסונו הוא $\sqrt{2}=1.414...$).

הקושי הגדול בהסבר זה הוא, שאף אם היקף העמוד הוא 21 טפחים, גם אז - לפי החישוב הנ״ל - היה עדיין טפח על טפח תחת העמוד, ואם כן, מדוע נקבה המשנה את המספר 24 כגבול,

שמתחתיו זוהי "טומאה רצוצה", שאז לכאורה אין טפח על טפח תחת העמוד! (הר"ש [על המשנה במקום] ומהרי"ט [בתשובות, חלק ב' יורה דעה סימן ו'] דנו ארוכות בבעייה זו, והציעו כמה סברות לענין זה, אך לכדי הסבר מתמטי מניח את הדעת - לא הגענו).

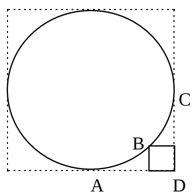
נציג להלן שתי שיטות, מהן עולה שהערך 24 הוא מדויק לחלוטין, תחת הנחות מסוימות.

צוקרמן (בספרו Das Mathematische im Talmud, עמ' 9-10) מניח, שהתנא סבר, ש- $\sqrt{2}=1\frac{1}{3}$, ולפי ערך זה אכן מקבלים היקף 24 טפחים בעמוד, בדרך דומה לחישוב הקודם. לכאורה, זה תמוה מאוד שהמשנה תשתמש בערך כל כך רחוק ל $\sqrt{2}$, מה עוד ששיעורים יותר טובים כבר נזכרו במשנה בעירובין [פרק ה'].

עתה, ננסה לברר, מה היה יסוד המשנה להשתמש בשיעור זה, וכיצד היא הגיעה אליו. הרב שמעון בן צמח דוראן [שו"ת התשב"ץ, חלק א' סימן קס"ה] מבאר, שפעמים רבות חכמים משתמשים בשיעורים מקורבים על מנת לקרב את ההבנה אל התלמידים, לפשט את לימוד הנושא וללמד את העקרונות. אך כאשר פסקו למעשה, קבעו את השיעור על פי השיעורים המדויקים. ולכן, במשנה זו, כאשר רצו לקרב את ההבנה אל התלמידים - השתמשו בשיעור מקורב של $\sqrt{2}$, שגם נתן תוצאה "יפה" שאפשר להבינה ולזוכרה בקלות (ראה גם מקורות [1,5]).

אך עדיין נותר לשאול כיצד הגיעה המשנה לשיעור $\frac{4}{3}$ עבור $\sqrt{2}$, הלא במקומות אחרים המשנה משתמשת בערכים יותר מדויקים עבורו. הרב חיים סתהון מביא בהקדמה לספרו "ארץ חיים" שני דברים בשם אביו, הרב מנשה סתהון. בעניין השני הוא מביא שיטה לחישוב שורשים, שכנראה המשנה השתמשה בה (על פי שיטה זו, הוא פתר בצורה מפליאה את סוגיית "סוכה עגולה" [סוכה דף ז'-ח']): כדי לחשב שורש של מספר שאין לו שורש שלם, תמצא את שני המספרים בעלי שורש שלם ש"תוחמים" אותו, ואז תדע את שורשו של המספר על פי מרחקו הפרופורציונלי מאותם מספרים בעלי שורש שלם (שיטה זו נקראת "אינטרפולציה לינארית" - קירוב על ידי ישר). לדוגמה נחשב מהו $\sqrt{20}$ לפי שיטה זו. $4^2=16<\mathbf{20}<25=5^2$, לכן: $4<\sqrt{20}<5$. כעת, על פי שיטת ה"אינטרפולציה הלינארית": $\sqrt{20}\approx 4+\frac{20-16}{25-16}=4\frac{4}{9}$. כעת נראה מהו $\sqrt{2}$ על פי שיטה זו: $\sqrt{2}\approx 1+\frac{2-1}{4-1}=1\frac{1}{3}$! כלומר, המשנה השתמשה ב"קירוב הלינארי" הפשוט ביותר של $\sqrt{2}$, מתוך הבנה שבשימוש המעשי משתמשים בקירובים טובים יותר, המתקבלים אף הם על ידי "אינטרפולציה לינארית" (לניתוח מלא של השיטה, ראה מקורות [3,5]).

שיטה נוספת לפיה שיעור המשנה יוצא מדויק היא שיטת הרב מונק (מקור [2]). במאמרו שם הוא מסתמך על הסיפא של המשנה הקודמת [אהלות י"ב ז'] על מנת להגיע לעיקרון, שעל פיו אפשר להסביר את משנתנו: להפוך את היקף העמוד העגול לחלק מהיקף הריבוע החוסם אותו, על ידי יישור קשתות:



אם נתחיל שהיקף העמוד הוא 24 טפחים, היקף הריבוע החוסם הוא 32(= $24\times\frac{4}{3}$) טפחים (על פי הכלל "כמה מרובע יתר על העיגול - רביע" [סוכה דף ח' ע"א], האומר שהיקף עיגול החסום בריבוע = 3/4 היקף הריבוע), ולכן AD=DC=4. מצד שני, AB=BC=3 (כל קשת כזו היא שמינית מההיקף כולו), ולכן יישור של AB על AD, ושל BC על DC יותיר לנו את ה"טפח החסום" המבוקש - שכן ההפרש בין הקשת המיושרת למחצית הצלע הוא בדיוק טפח אחד (היקף קטן יותר של העמוד לא יתן לנו את הטפח המבוקש על פי שיטה זו).

לשיטה זו הוא מביא מקור מסייע מהסוגיה בעירובין לגבי חלון עגול [דף ע"ו], שכן באמצעות עיקרון זה של יישור קשתות הוא מסביר שם את שיטת רש"י. הסוגיה שם דנה בשיעור חלון שמצרף שתי חצירות לעניין עירובי חצירות בשבת. מדינא דמשנה אנו זקוקים לחלון ריבועי בגודל ד' טפחים על ד' טפחים, כאשר משהו מן החלון צריך להיות בתוך י' טפחים לקרקע. לגבי חלון עגול מלמדנו רבי יוחנן שם, שצריך שיהיו 24 טפחים בהיקף החלון, ושני טפחים ומשהו מההיקף צריכים להיות בתוך י' טפחים לקרקע. רש"י מבאר שיש "לזרוק" את אותם 2 טפחים

יתירים מן ההיקף העגול על מנת להגיע אל היקף החלון הריבועי, ואכן על ידי שיטת ״יישור קשתות״ דברי רש״י מתבהרים: נזרוק מכל צד של המעגל את שני הטפחים היתירים, ואז קבלנו 16 (=2x4 - 24) טפחים נותרים בהיקף העגול, ועתה יש ליישרם על מנת לקבל את ההיקף הריבועי.

סיכומם של דברים: ראינו שתי שיטות להסבר המשנה, כך שהיא יוצאת מדויקת. האחת, קרובה להבנה הפשוטה, והשנייה מציגה שיטה חדשה ולא סטנדרטית לטיפול בבעיות גאומטריות בהלכה, שבהם מופיעים מעגלים. הקורא החפץ להעמיק בנושא זה יפנה למקורות [5,4]).

לעיון נוסף:

1. יקותיאל גינצבורג, **יעקב משה מאירסון**, מתוך: יקותיאל גינצבורג - כתבים נבחרים, הוצאת ספרים מ׳ ניומן, תל אביב - ירושלים, תשכ״א, 151-168.
2. הרב מתתיהו הכהן מונק, **דרכיה של ההלכה בפתרון בעיות הנדסיות מיוחדות**, הדרום כ״ז, תשכ״ח, קט״ו-קל״ג.
3. דוד גרבר ובועז צבאן, **סוכה עגולה (ב)**, מגל י״א, תשנ״ה, 127-134.
4. דוד גרבר (בהנחיית הרב שמעון וייזר), **עמוד שהוא מוטל לאויר**, מגל י״א, תשנ״ה, 135-155.
5. יאיר הלוי, דוד גרבר ובועז צבאן, **שיטת הרבנים סתהון לחישוב שורשים**, מתמטיקה בחמ״ד (התקבל).

דוד גרבר ובועז צבאן
המחלקה למתמטיקה