מקור קדמון לשיטה מתמטית בספר התשב״ץ

דוד גרבר ובועז צבאן
המחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב
אוניברסיטת בר-אילן
ומכון שלמה אומן שע״י ישיבת שעלבים

מבוא

בספר התשב״ץ (המאה הט״ו) מופיע דיון במספר סוגיות בעלות אופי מתמטי מובהק. הדיון עוסק, בין השאר, בחישובים של נפחי מקוואות ובצורתו של הים שעשה שלמה. הדיון משתרע על פני סימנים קכט, קסג-קסו וקעב. אופיו המתמטי של הדיון משך את תשומת ליבם של מתמטיקאים ואנשי תורה (ראה למשל במקורות [**4**, **6**, **13**]), ובמהדורה חדשה של השו״ת [**15**] נוסף נספח מתמטי מקיף [**7**], המבאר את הסימנים הנזכרים בניסוח מתמטי מודרני, ומנתח את תקפות הטיעונים המתמטיים המופיעים בהם. במאמר זה נתמקד בסימנים קסד, קסה ו-קעב של השו״ת, בו מובא נסיון מעניין של ״מהנדס״ בשם אנבלשום אפרים להתמודד עם סוגיית הים שעשה שלמה (בבלי עירובין יד ע״ב). במאמר זה נראה, ששיטה זו שאובה ממקור שקדם לספר התשב״ץ בכשלוש מאות שנים: חיבור המשיחה והתשבורת לרבי אברהם בר חייא הנשיא (המאה הי״ב). יתר על כן, נראה שלפני בעל השיטה היה כנראה העתק, או תרגום, של חיבור המשיחה והתשבורת.

עיקר המאמר מורכב משני פרקים. בפרק הראשון יובא רקע על ראב״ח ואנבלשום אפרים, וינתן רקע לסוגיית הים שעשה שלמה. בפרק השני נשווה בין דברי ראב״ח ב״חיבור המשיחה והתשבורת״ לבין דברי אנבלשום המובאים בשו״ת התשב״ץ. בנספח נשווה את שיטתם המתמטית. לפני כל קטע בהשוואה, תינתן הקדמה קצרה להבהרת הקטע. כיון שמטרת המאמר היא להוכיח - מעבר לכל ספק סביר - שאנבלשום שאב את שיטתו מראב״ח, נשווה בין הנוסחים בצורה מפורטת ככל האפשר ונראה שהם זהים לא רק בתוכן, אלא גם בסדר הבאת הדברים ובמבנה הצורני.

מאמר זה יושלם על ידי מאמר נוסף [**8**], בו אנו מראים שכתבי ראב״ח שימשו מקור לפרשנים רבים אחריו, ביניהם גם כאלו שאינם מציינים את שמו במפורש.

א. רקע

1. ראב"ח וספרו "חיבור המשיחה והתשבורת"

רבי אברהם בר חייא הנשיא[1] (ראב"ח) נולד בשנת 1056 לערך בברצלונה, ונפטר בשנת 1136 לערך (להרחבה ראה מקור **[12]** במבוא). ראב"ח היה מתמטיקאי, אסטרונום מלכותי, אסטרולוג ופילוסוף, ולקח חלק מרכזי בהפצת הידע הערבי באירופה: יחד עם פלטו מטיבולי,[2] הוא תרגם ספרי מדע ערביים ללטינית. ראב"ח היה מהראשונים שכתבו חיבורים מדעיים בעברית, לשמם הוא אף המציא מספר מלים חדשות [**14**, עמ' 169].

בשנת 1116 חיבר ראב"ח את ספרו "חיבור המשיחה והתשבורת"[3] העוסק בגאומטריה הדרושה למדידת קרקעות ונפחים. בשנת 1123 ביקר ראב"ח בצרפת, ועשה להפצת הידע המתמטי בין מודדי הקרקעות היהודים בצרפת, אשר 'אינן בקיאין במדידת הארצות ולא זריזין בחלוקתן, אבל הם מזלזלין בדבר הזה זלזול גדול, ומחלקין את הקרקעות בין היורשין והשותפין לפי אמידה וגוזמא' (ראב"ח בהקדמתו ל"חיבור המשיחה והתשבורת" [**3**, עמ' 2-3]). ביטוי מסויים לפופולאריות של החיבור ניתן למצוא בכך שווריאציה של אחת ההוכחות המופיעות בו קיבלה מקום של קבע *בשלושה מקומות שונים* בפירוש התוספות לתלמוד (בבלי עירובין נו ע"ב, פסחים קט ע"א, סוכה ח ע"א).[4] הספר תורגם ללטינית ע"י פלטו מטיבולי, בהשמטת חלקים מסויימים, תחת השם Liber Embadorum. לאונרדו פיבונצ'י מפיזה, המתמטיקאי החשוב ביותר באירופה של ימי הביניים, אימץ חלקים מסויימים מהתרגום לספרו Practica Geometriae (1123), שהיה למקור העיקרי של ידע בגאומטריה עבור האירופאים של אותו זמן [**3**, **11**].

ראב"ח חיבר ספרים חשובים נוספים באסטרונומיה, וכן בענייני מחשבה ומוסר. על חיבוריו, תפוצתם והשפעתם ראה [**8**].

אין בידינו עדויות להשפעתו של ראב"ח בענייני הלכה (מעבר לפן המתמטי והאסטרונומי), למעט מחלוקת בינו לבין בן דורו רבי יהודה בן ברזילי הברצלוני בנוגע להתחשבות באסטרולוגיה לגבי שעת חתונה מסויימת שחלה בדורם. בעקבות הויכוח כתב ראב"ח קונטרס להגנת המשתמשים באסטרולוגיה [**17**].

2. אנבלשום אפרים ודיונו עם רשב"ץ

בספר התשב"ץ[5] חלק ראשון סימן קכט הביא רבי שמעון בן צמח דוראן[6] שאלה שנשאל ביחס לנפחי מקוואות כדוריים [**15**, סימן קכט הערה 3]. בסוף התשובה מובאות מספר צורות של מקווה בהן מסתפק רשב"ץ, כיון שלא היו בידיו הנוסחאות לחישוב נפחן. בסימן קסג שם הוא מפנה שאלה בעניינים אלו אל אנבלשום אפרים 'לפי שהיה בקי בחוכמת התשבורת'. אנבלשום חי כנראה במיורקא, והשתייך למשפחה ששמה "יהושע". יש המזהים אותו כאחיו של וידאל אפרים, רבו של רשב"ץ, שמת על קידוש ה' בפרעות קנ"א במיורקא (ראה [**2**, עמ' 283], [**4**], וכן [**15**, עמ' שנ"ח הערה 1]).

בסימן קסד מובאת תשובתו של אנבלשום אפרים לשאלות רשב"ץ, ומתחילה תשובתו של רשב"ץ לדבריו. תשובת רשב"ץ נמשכת באריכות גם בסימנים קסה-קסו ו-קעב. במהלך תשובה זו מביא רשב"ץ ציטוטים נוספים מדברי אנבלשום שלא הובאו בסימן קסד.

בין יתר הדיונים שהתפתחו בין רשב"ץ לאנבלשום נסוב דיון ארוך (סימנים קסה ו-קעב) על סוגיית הים שעשה שלמה.

3. סוגיית הים שעשה שלמה

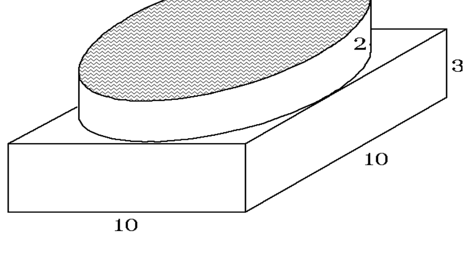
בין הכלים שהיו במקדש שלמה, מוצאים אנו את הים, ששימש לרחצת הכהנים לצורך העבודה במקדש: 'והים לרחצה לכהנים בו' (דבה"ב, ד, ו). ייתכן שהים שימש גם לטבילת כלי המקדש בשעת הצורך: 'דילמא בים של שלמה הוה מטביל ליה' (בבלי פסחים קט ע"ב, בנוגע להטבלת שולחן לחם הפנים).

בתיאור בנין בית המקדש המופיע בספר מלכים כתוב:

> ויעש את הים מוצק עשר באמה משפתו עד שפתו עגול סביב וחמש באמה קומתו וקו שלושים באמה יסוב אותו סביב ... ועביו טפח ושפתו כמעשה שפת כוס פרח שושן אלפיים בת יכיל (מל"א ז, פס' כ"ג,כ"ו).

תיאור כמעט זהה מופיע בספר דברי הימים, אלא ששם מסתיים התיאור: 'ועביו טפח ושפתו כמעשה שפת כוס פרח שושנה, מחזיק בתים שלושת אלפים יכיל' (דבה"ב, ד, ה).
ביחס לסתירה בין שיעורי נפח הים בשני המקומות (אלפיים בת לעומת שלושת אלפים בת), מסבירה הגמרא (בבלי עירובין יד ע"ב): 'ההוא לגודשא', כלומר: בשיעור נוזלי (שהוא הנפח האמיתי של הים), שיעורו אלפיים בת. לעומת זאת, בשיעור מוצק (בו אפשר להעמיס על הים גודש מעבר לנפחו האמיתי), שיעורו שלושת אלפים בת. כתוצאה מכך, מסיקה הגמרא שם ששיעור הגודש של כלי הוא שליש מנפח הכלי.

בגמרא (שם) מובא דיון בענין מבנה הים שעשה שלמה. בהנחה שנפח הים הוא אלפיים בת (שהם ארבע מאות וחמישים אמות מעוקבות) ורוחבו הוא עשר אמות ככתוב בפסוקים הנ"ל, יוצא שכלי בצורת תיבה ריבועית הוא גדול מדי, וכלי בצורת גליל הוא קטן מדי. לפיכך, קובע רמי בן יחזקאל: 'ים שעשה שלמה - שלוש אמות תחתונות מרובעות ושתיים עליונות עגולות' (ראה [**6**, פרק 4]):



בסוגיה זו מתעוררות כמה שאלות:

א. לא מבואר לְמַה מתייחסות המלים 'ועביו טפח' המובאות בשני המקורות?[7]

ב. כיצד יתכן שיש יחס קבוע בין נפח הגודש לבין נפח הכלי?

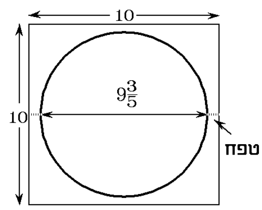
על שאלות אלו ונקודות נוספות מתעכב ראב"ח בסיום ספרו "חיבור המשיחה והתשבורת" (שער רביעי, סעיפים 193 - 196) וגם אנבלשום אפרים בתשובתו לרשב"ץ, קרוב לודאי בעקבות ראב"ח (כפי שנראה בהמשך). במקום אחר [**7**] ניתחנו בפירוט את שיטת אנבלשום (עיין שם). במאמר זה נתעכב בעיקר על ההשוואה בין שיטות ראב"ח ואנבלשום אפרים.

ב. פירוש ראב"ח ואנבלשום אפרים לים שעשה שלמה

1. מבנה הים שעשה שלמה

בקטעים שנראה בסעיף זה, דנים ראב"ח ואנבלשום אפרים בהסבר הכתוב 'ועביו טפח', וכן בחישוב נפח המקוה מתוך חישוב וידיעת נפח הים.

חישוב עובי השפה של הים ושטח החלק העגול שלו. בתחילה, מחשבים ראב"ח ואנבלשום את מידותיו של החלק העגול של הים, ובאמצעות כך את שטחו. בשלב ראשון, הם מסבירים את הכתוב 'ועביו טפח' כך: היה הפרש של טפח בין החלק העגול לחלק הריבועי:



על פי הכתוב, רוחבו של החלק הריבועי הוא עשר אמות, ולכן אם נוריד טפח (חמישית אמה) מכל צד, נקבל שקוטר החלק העגול הוא $9\frac{3}{5}$ אמות, בהנחה שישנם חמישה טפחים באמה.[8] אם נחשב את ההיקף של מעגל בעל קוטר $9\frac{3}{5}$ אמות, נקבל שהיקפו הוא $9\frac{3}{5}\cdot 3\frac{1}{7} = 30\frac{6}{35} \approx 30\frac{1}{6}$ אמות בקירוב.[9]

בפסוק נאמר שהיקף הים היה שלושים אמה בדיוק, ועל כן ההפרש $30\frac{1}{6} - 30 = \frac{1}{6}$ אמה מבטא את תוספת ההיקף, בעקבות עובי שפת הים שהיתה 'כמעשה שפת כוס פרח שושן'. לכן, עובי השפה הוא $\frac{1}{2}\left(30\frac{1}{6}/3\frac{1}{7}-30/3\frac{1}{7}\right)\approx\frac{1}{36}$ אמה שהוא שני שלישי אצבע (אמה אחת שווה לעשרים וארבע אצבעות).

מידיעת הקוטר וההיקף, הם מחשבים את שטח החלק העגול: על פי הכלל ששטח עיגול שווה למכפלת חצי הקוטר בחצי ההיקף, יוצא לראב"ח וגם לאנבלשום שהשטח הוא $72\frac{2}{9}$ אמות רבועות. בחשבון זה נפלה כנראה טעות, שכן שטח העיגול הפנימי (ללא השפה) הוא $72-\frac{9}{22}$ אמות רבועות, ושטח העיגול הפנימי בתוספת השפה הוא $72\frac{2}{5}$ אמות רבועות. דהיינו, אין מקרה שבו מתקבלת התוצאה $72\frac{2}{9}$ שאליה הגיעו משום מה ראב"ח ואנבלשום.

על נקודה זאת ראוי להתעכב מעט: אם נכונה טענתנו שהתוצאה שגויה, הרי לא סביר כלל ועיקר שראב"ח ואנבלשום שגו *בדיוק באותו אופן* כאשר אין תלות ביניהם. זאת ראיה כמעט ודאית לכך שאנבלשום שאב את דבריו מדברי ראב"ח, ונגרר כאן אחר שגיאתו, למרות שלא הזכיר אותו כלל בתשובתו לרשב"ץ.[10]

את שגיאת ראב"ח אפשר אולי להסביר בכך, שלאחר שהוא ביצע את החישוב וקיבל את התוצאה הנכונה, התחלפה לו הגירסה.[11]

ראב"ח (חיבור המוה"ת, סעיף 193)	אנבלשום (תשב"ץ ח"א סימן קסה)
ואם תאמר מן הים שעשה שלמה אנו רואים שהקו המקיף יש בו שלשה מן הרוחב, כי כן הוא אומר: 'עשר באמה משפתו עד שפתו וכו' וקו שלושים באמה יסוב אותו',	כתבת זה לשונך, 'עשר באמה משפתו אל שפתו עגול סביב וחמש באמה קומתו וקו שלושים באמה יסוב אותו סביב', ונראה בתחילת הדמיון שאינו מדקדק אל השביעי.
נאמר לך מן הים שעשה שלמה אנו למדים, ואם תרצה אמור דנים וגוזרים כי הקו המקיף הוא שלשה ושביעית מן קו הרוחב, כי כן הוא אומר: 'ועביו טפח ומעשהו כמעשה שפת כוס פרח שושן'. ובדברי הימים הוא אומר: 'ועביו טפח ושפתו כמעשה שפת כוס'.	גם בו דקדוק מוחש למעיין היטב, שכתוב 'ועביו טפח ושפתו כמעשה שפת כוס פרח שושן',
ותראה כי העיגול היה רחוק מן הצלע הישרה המרובעת טפח אחד, ויהיה הקו הנשאר לרוחב העיגול עשר אמות פחות שני טפחים מחמישה טפחים באמה כאשר שיערו אותה רז"ל,	נראה שהעיגול רחוק מצלע המרובע טפח, והם שני טפחים בקוטר מחמישה באמה,
ואמרו פחות ב' טפחים מפני שהעובי היה סובב על כל	וכן אמרו פחות שני טפחים מפני שהעובי היה סובב על כל

ההיקף.	ההיקף.
ואם תמנה תשע אמות ושלשה חומשי האמה שלוש פעמים ושביעית פעם, יהיה שלושים אמה וששה חלקים משלושים וחמישה חלקים באמה והוא היה סובב הים מחוץ לשפת העיגול,	ואם תכפול תשע אמות ושלושה חומשין על שלושה ושביעי, יהיה סביב הים מחוץ לשפת העיגול שלושים אמה ושתות בקרוב,
והיה סובבו מבפנים שלושים באמה לא פחות ולא יותר.	ויהיה סביבו מבפנים שלושים אמה,
ותמצא מכאן עובי שפת העיגול, אשר היה כפרח שושן, כגון חלק אחד מן שלושים ושישה חלקים באמה.	נראה שעובי שפת העיגול אשר בפרח שושן כמו שני שלישי אצבע.
ואם אתה מונה מחצית הרוחב במחצית הקו הסובב	ואם תכפול חצי הקוטר על חצי ההיקף כדרך האמת,
ותהיה מרגיש בחשבונך אל העובי הזה,	ותרגיש לעובי הזה,
יהיה תשבורת העיגול לאמה אחת ע״ב אמה וב׳ תשיעי אמה.	תמצא שטח העיגול שבעים ושתים אמה ושתי תשיעיות.

חישוב נפח הים באמות רבועות. לאחר חישוב שטחו של החלק העגול של הים (שבו כאמור נפלה טעות), עוברים ראב״ח ואנבלשום לחישוב נפח הים: ראשית, יש להכפיל את שטח החלק העגול בגובהו, כדי לקבל את נפחו: $2\cdot 72\frac{2}{9}=144\frac{4}{9}$ אמות מעוקבות.[12] לכך יש להוסיף את נפח החלק הריבועי של הים, שצלע בסיסו היתה עשר אמות, וגובהו שלוש אמות, ולכן נפחו הוא $10\cdot 10\cdot 3=300$ אמות מעוקבות. מכאן, שהנפח הכולל של הים הוא $300+144\frac{4}{9}=444\frac{4}{9}$ אמות מעוקבות.

ראב״ח (חיבור המוה״ת, סעיף 193)	אנבלשום (תשב״ץ ח״א סימן קסה)
ואם אתה כופל תשבורת האמה בעיגול יהיה תשבורת שני האמות המעוגלות קמ״ד אמה וארבע תשיעיות באמה,	והיא תשבורת לאמה אחת בגובה, ולשתי אמות מאה ארבעים וארבע וארבע תשיעיות,
הוסף עליהן ש׳ אמה שהן תשבורת השלוש אמות המרובעות,	והים היה גובהו חמש אמות, שלוש הראשונות מרובעות ושתי העליונות עגולות, ותשבורת שלוש אמות התחתונות שלוש מאות אמה,
יהיה תשבורת הים כולו תמ״ד אמות וארבע תשיעיות.	יהיה תשבורת הים כולו ארבע מאות ארבעים וארבע אמה וארבע תשיעיות.

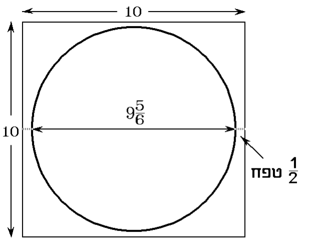
חישוב נפח מקוה (באמות מעוקבות) על פי נפח הים. בשלב האחרון, מחשבים ראב״ח ואנבלשום את הנפח המדויק (באמות מעוקבות) של ארבעים סאה. כיון שהנפח הכולל של הים הוא $444\frac{4}{9}$ אמות מעוקבות, וידוע מהכתוב הנ״ל שנפח הים הוא אלפיים בת (שהם ששת אלפים סאה), הרי

שאמה מעוקבת שווה בנפחה ל- $\frac{2000}{444\frac{4}{9}} = 4\frac{1}{2}$ בתים. כיון שהבת שווה לשלוש סאים, יוצא שאמה מעוקבת שווה בנפחה ל- $3\cdot 4\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$ סאים. מכאן, ששלוש אמות מעוקבות הן $40\frac{1}{2}$ סאים, ולכן ארבעים סאה הם $3-\frac{1}{27}$ אמות מעוקבות (ראה [**7**, עמ' תל"ט], בהתיחסות להערה 215). כעת הם מסבירים שמימרת חז"ל - הקובעת שנפח מקוה (שהוא ארבעים סאה) הוא אמה על אמה ברום שלוש אמות - נקטה שיעור לחומרא, שכן לפי החישוב הנ"ל אפשר להסתפק באמה על אמה ברום $3-\frac{1}{27}$ אמות.

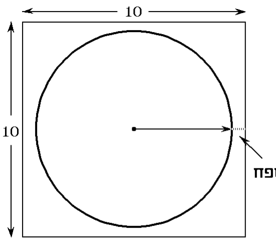
ראב"ח (חיבור המוה"ת, סעיף 193)	אנבלשום (תשב"ץ ח"א סימן קסה)
ואם אתה כופל המספר הזה ארבע פעמים וחצי יהיו אלפיים, ותמצא מכאן שאמה אחת בים היתה מחזקת ארבע בתים וחצי.	ואם היה כן, יהיה תשבורת אמה אחת מחזקת ארבעה בתים וחצי, כי כאשר תכפול ארבע מאות ארבעים וארבע וארבע תשיעיות בארבע וחצי יעלה אלפיים,
ורבותינו ז"ל שיערו את המקוה על חלק אחד מן ק"ן חלקים בים, כי הים היה מכיל אלפיים בת. והבת והאיפה תוכן אחד הם, והאיפה היא שלש סאין, תמצא מכילת הים ששת אלפים סאה,	והוא הכתוב אלפיים בת יכיל, והבת והאיפה מידה אחת, ושיערו המקווה אחד ממאה וחמישים חלקים בים, והאיפה והבת שלוש סאין, יהיה הים ששת אלפים סאין,
והמקוה היא ארבעים סאה,	והמקוה ארבעים סאין,
יהיה מכאן המקוה חלק אחד מק"ן חלקים בים,	יהיה המקוה אחד ממאה וחמישים בים,
ויהיה מכאן שיעור גוף המקוה על חשבונינו אמה על אמה ברום ג' אמות פחות חלק אחד מכ"ז חלק באמה.	ויהיה תשבורת שלוש אמות שלושה עשר בתים וחצי שהם ארבעים סאה וחצי, ויהיה תשבורת המקוה לחשבון זה שהוא ארבעים סאה אמה על אמה ברום שלוש אמות פחות חלק מעשרים ושבעה חלקים באמה,
ורבותינו ז"ל שיערו המקוה אמה על אמה ברום ג' אמות שלמות ולא חששו על החסרון היוצא מן החשבון הזה מפני שהוא מביא לידי חומרא במצוות כדרכן בכל הדומה לו.	ואם הוסיפו בתשבורת המקוה הוסיפו לחומרא כדרכן.

2. האם 'ועביו טפח' הוא מצד אחד או משניים

נותר עדיין להסביר כיצד הגמרא (בבלי עירובין יד ע"ב) הגיעה למסקנה ששטח החלק העגול של הים הוא שבעים וחמש אמות רבועות (שכן לפי ראב"ח ואנבלשום שטחו הוא $72\frac{2}{9}$ אמות רבועות). הספק שמתעורר הוא: מהי כוונת הכתוב 'ועביו טפח'? האם החלק העגול צר מן החלק הריבועי בטפח בסך הכל, או שהחלק העגול צר מן החלק הריבועי בטפח מכל צד:



מיעוט טפח בקוטר



מיעוט טפח ברדיוס

ראב״ח ואנבלשום מחשבים את ההבדל בין שני המקרים בהנחה שבאמה יש שישה טפחים.[13] במקרה הראשון קוטר החלק העגול הוא $10-\frac{1}{6}=9\frac{5}{6}$ אמות, ולכן שטח החלק העגול הוא $\frac{3\frac{1}{7}}{4}\cdot\left(9\frac{5}{6}\right)^2\approx 76$ אמות רבועות. במקרה השני קוטר החלק העגול הוא $10-2\cdot\frac{1}{6}=9\frac{4}{6}=9\frac{2}{3}$ אמות, ואז שטח החלק העגול הוא $\frac{3\frac{1}{7}}{4}\cdot\left(9\frac{2}{3}\right)^2\approx 73\frac{1}{2}$ אמות רבועות.[14] מכיון שיש ספק, אומרים ראב״ח ואנבלשום, חז״ל לקחו ערך ביניים: שבעים וחמש אמות רבועות (ראה [**7**, עמ׳ ת״מ], בהתייחסות להערה 221).

ראב״ח (חיבור המוה״ת, סעיף 194)

והוי יודע כי הטפח הזה יכול לסבור בו ב׳ סברות. האחד שיהיה הטפח הזה עובי השפה הסובבת את העיגול מכל צד, וישאר ברוחב על הסברא הזאת עשר אמות פחות ב׳ טפחים.

והסברא הב׳ שיהיה העובי הזה נאמר על הנחסר מקו הרוחב ויהיה הטפח נחלק בקו הסובב משני צידי הרוחב. וישאר בו על הסברא הזאת עשר אמות פחות טפח,

ורז״ל לקחו דרך אמצעית בין שתי הסברות האלה ומנו באמה ששה טפחים להוסיף בחומרא. ואם אתה מונה ברוחב העגול עשר אמות פחות טפח א׳ מששה טפחים באמה יהיה תשבורת אמה אחת מן הים לדעת חכמי השיעור ע״ו אמות ומשהו.

ואם אתה מונה בו עשר אמות פחות ב׳ טפחים, יהיה באמה לדבריהם ע״ג אמות וכגון מחצית האמה.

ורז״ל לקחו דרך אמצעית בין שתי חשבונות האלה ומנו באמה ע״ה אמות והיו מרגישים לעובי השפה וחוששים לשתי הסברות ומנו באמה ששה טפחים להוסיף בחומרא, והלכו על דרך חכמי השיעור ולא זלזלו בחשבון כאשר עלה בליבך, ונתנו לבני העולם דרך קרובה לחשוב והחמירו במצוה הזה בכל המעשה הזה כראוי להם – זכרונם

אנבלשום (תשב״ץ ח״א סימן קסה)

אבל מדעתי שהיה ספק להם טפח החסר אם היה על פני כולו, ויהיה הקוטר עשר אמות פחות שני טפחים,

או יהיה הטפח החסר לכל הקוטר, ויהיה הקוטר עשר אמות פחות טפח,

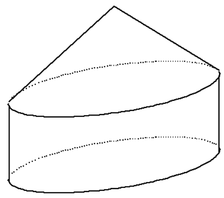
ויהיה תשבורת לאמה אחת לים לפי חכמי השיעור לקוטר עשר אמות פחות טפח לשישה טפחים באמה, כי כן הסכימו לעשות לחומרא, שבעים ושש אמה בקירוב,

ויהיה תשבורת לאמה אחת בים לקוטר פחות שני טפחים שבעים ושלש אמה,

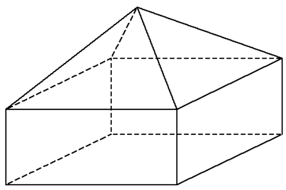
והם לקחו הדרך האמצעית ונתנו לאמה אחת לים שבעים וחמש אמות ונתנו לשתי אמות בגובה מאה וחמישים אמה.

3. הגודש

כעת נדרשים ראב"ח ואנבלשום להסביר את תירוץ הגמרא ('ההוא לגודשא'), שנועד ליישב את הסתירה בין הפסוק במלכים 'אלפיים בת יכיל' לבין הפסוק בדברי הימים 'מחזיק בתים שלושת אלפים יכיל'. ראשית, הם דנים בטיבו של הגודש המצטבר על כלי כאשר מעמיסים אותו בחומר מוצק.



כלי עגול ועליו חרוט הגודש



תיבה ועליה פירמידת הגודש

ראב"ח (חיבור המוה"ת, סעיפים 195-196)

וחכמי השעור אשר דרכם לחקור על זה ועל כל הדומה לו אמרו: כל כלי אשר יהיה פיהו מרובע שוה בזויותיו ובצלעותיו, אם אתה ממלא אותו חוצה על פיהו מקמח או מזרע גד או דוחן, או מדבר דק ומחספס, אשר הוא ראוי להציק את מעמדו, תמצא תצוקת הכלי הזה על ראשו דמות מוצק אשר גובהו מחצית צלע תושבתו, מפני שהמוצק ההוא תהיה הזוית אשר על ראשו נצבת, ועל כן הוא יכול להחזיק כי כל זמן שהיה הגובה פחות ממחצית הצלע היתה זוית הראש נרווחת, ויהיה כל דבר דק יכול להחזיק את גופו ברחב הזוית עד שיעלה הגובה אל מחצית צלע התושבת,

ותהיה הזוית בעת ההיא נצבת ותעמוד משם התוספת,

והיה כל דבר שאתה מוסיף במוצקו על הזוית הנצבת נגד (נגר?) ארצה. ודבר זה בהיר ומפורש לכל המבין את דרך השיעור.

ומתוך הכלל הזה אנו אומרים, כל כלי מרובע על זוית ניצבה אשר ארכו ורוחבו וגובהו שווים, תהיה תצוקת

אנבלשום (תשב"ץ ח"א סימן קעב)

והגבשישות כפי צורת הכלי, אם הוא רחב או גבוה, כי ברחב יותר מכפל גובהו הוא יותר משלישו, אם בגבוה יותר מחצי רוחבו הוא פחות משלישו. והתבאר במופת שהמחודד שליש המגושם כשיהיה המגושם בין שתי שטחים נכוחים, וכן היא שליש האיצטוונא.

והמחודד שהוא גבשישותו שליש הכלי הוא, אם יהיה הכלי על זוית ניצבת, ובתנאי שיהיה התושבת כפל הגובה, ואז יעלה גבשישות המחודד עד שיהיה גובהו כמו חצי התושבת שהוא כמו גובה הגבשישות, ואז יהיה המחודד

מהגבשישות ניצב הזוית,

ועד כאן יעלה גבשישות הזרע הנמדד.

ראשו שתות חוזק גופו, ואם הכלי המרובע הניצב יהיה גובהו מחצית צלע תושבתו, תהיה תצוקתו שליש החזקתו. ואם גובהו יהיה שליש צלע תושבתו, יהיה מחזיק במצוקתו מחצית חוזק גופו, ומן הענין הזה אתה יכול למצוא ערך תצוקת כל כלי מרובע התושבת אל חוזק גופו, כשאתה יודע את ערך גובהו אל צלע תושבתו.

והים אשר עשה שלמה היתה קומתו מחצית צלע תושבתו והיתה תצוקתו ראויה להיות שליש חוזק גופו, אבל מפני העיגול שהיה בשתי אמות ממנו לא עמד הכלל הזה בידינו.

וזה שיהיה צורת הכלי שווה בגובה, וצורת הים אינו כן אבל הוא פחות העליון מהתחתון, והוא העגול פחות מהמרובע, ועם היות שהגובה כחצי התושבת לא יהיה הגבשישות שליש הים.

4. חישוב נפח הים בדברי הימים

בהמשך הדיון, מסבירים ראב״ח ואנבלשום שהפסוק בדברי הימים מתאר את נפח הים יחד עם הגודש, כאשר נשלים את חלקו העליון של הים לריבוע. לפי זה, אומר ראב״ח, ההבדל בין הפסוקים בא ללמדנו את יחס הנפחים בין כלי גלילי לבין כלי תיבתי, כפי שמסביר זאת ראב״ח בסוף פירושו.

נחשב את נפח הים עם הגודש בהנחה שהים היה כולו מרובע: צלע בסיסו הריבועי היא עשר אמות וגובהו חמש אמות, ולכן נפחו הוא חמש מאות אמות מעוקבות. נפח זה שווה לאלפיים מאתיים וחמישים בת (שכן לפי האמור לעיל, אמה מעוקבת שווה ל $4\frac{1}{2}$ בתים). כעת, נפח הגודש הוא שליש מנפח הים, ולכן נפחו הוא: $\frac{1}{3}\cdot 2250 = 750$ אמות מעוקבות, ולכן נפח הים עם הגודש הוא 750+2250=3000 בת. לפיכך, ההפרש בין הכתובים מלמדנו שהפיכת שתי האמות העליונות לגליל הקטינה את נפח הים (בלי הגודש) פי 2000/2250=8/9, כלומר נפח הים קטן בתשיעית.[15]

ראב״ח (חיבור המוה״ת, סעיפים 195-196)

ונשאר לנו לומר

כי הכתוב בא להודענו מכילת הים העשוי על הצורה ההיא כמה היה מחזיק מן הלח וכמה היה יכול להחזיק מן היבש אם אתה מציר את ראשו.

במלכים הוא אומר ׳ומעשהו כמעשה שפת כוס פרח שושן אלפים בת יכיל׳ על מכילת גופו בלבד,

ובדברי הימים הוא אומר ׳ושפתו כמעשה שפת כוס פרח שושנה מחזיק בתים שלשת אלפים יכיל׳ על מכילת גופו עם תצוקתו. ומפני זה יהיה בין שני הכתובים החלוף הזה, האחד אומר אלפיים בת יכיל ואינו זוכר חוזק, והשני אומר מחזיק בתים שלשת אלפים יכיל, כאלו אמר

אנבלשום (תשב״ץ ח״א סימן קעב)

ואחר כל משא ומתן לא מצאתי ענין יסבול המקרא והמהנדסים, כי אם מה שאומר,

כי במלכים אמר ׳פרח שושן אלפיים בת יכיל׳ והוא שמחזיק גוף הים לבדו אם בלח אם ביבש,

ובדברי הימים הוא אומר ׳פרח שושנה מחזיק בתים שלשת אלפים יכיל׳, והוא מה שמחזיק גוף הים ביבש כשיהיה העליון מרובע כמו התחתון עם הגבשישות שהוא שלישו בצורה ההיא.

מחזיק עד שפתו בתים, אם אתה מוסיף עליהם מבחוץ יכיל שלשת אלפים. ואל הטעם הזה נתכוונו חכמים האומרים אלפים בת היה מחזיק מן הלח ושלשת אלפים מן היבש.

[ ]

ואלו היתה צורתו הולכת כתיקנה מרובעת עד פיהו, היתה תשבורתו חמש מאות אמה,	וכאשר יהיה כן יהיה מחזיק הים חמש מאות אמות,
ואם אתה כופל אותם ארבע פעמים וחצי פעם במספר הבתים, אשר האמה מחזקת לדעת חכמי השיעור, תמצא הים היה מחזיק אילו היתה צורתו מרובעת עד פיהו אלפיים בת ומאתיים וחמישים בת.	ולחשבון ארבעה בתים וחצי לכל אמה, בחשבונו יעלה אלפיים מאתיים וחמישים בתים,
ואילו היה מציק את ראשו עד נקודה, היתה תצוקתו שבע מאות וחמישים בת אשר הם שליש חוזק גופו,	ושלישו שהוא הגבשישות שבע מאות וחמישים בתים,
והיה מחזיק בגופו עם תצוקתו שלושת אלפים בת.	יהיה הכל שלושת אלפים בתים.
ותמצא הכתוב במלכים בא להודיענו כמה היה מחזיק בגופו אחר שנתעגלו ממנו שתי האמות, והודיענו בדברי הימים מה היה מחזיק בגופו עם תצוקתו אילו היתה צורתו המרובעת נשלמת כהלכתה על ריבוע תושבתה, וראינו מכאן כי עיגול שתי אמות היה מפחית מחוזק הים תשיעית מה שהיה מחזיק לא פחות ולא יותר.	וזה הבדל המקראות, והבדל תוכן הנמדד בלשון המקרא. זהו מה שיכולתי להבין לקיים המקרא וההנדסה, עד שאשמע יותר נכון מזה.

ג. סיכום ומסקנות

מההשוואה שערכנו בין דברי ראב״ח לאנבלשום אפרים, נראה שדברי אנבלשום הם העתקה כמעט מדוייקת של שיטת ראב״ח. הדיוק בהעתקה בא לידי ביטוי בתוכן, בסדר ובצורה שבהם הדברים מובאים, ואפילו בהיגררות אחר שגיאות החישוב.[16] במספר מקומות לשונו של ראב״ח מדוייקת יותר, מה שמעלה את ההשערה, שלפני אנבלשום לא נמצא הנוסח המקורי של חיבור המשיחה והתשבורת, וייתכן שהיה לפניו העתק לא-מדוייק או תרגום.

בכל אופן, הדברים בשו״ת התשב״ץ מובאים בשם אנבלשום ולא בשם ראב״ח. בין אם נקבל את סברתנו האמורה לעיל ובין אם לא, ייתכן שאנבלשום עצמו לא ידע שמקור ההעתקה שלפניו הוא בחיבור המשיחה והתשבורת לראב״ח, וציטט אותה כמות שהיא במכתבו אל רשב״ץ, ולכן הרשב״ץ מתייחס אל הדברים כאל דבריו של אנבלשום.

שלמי תודות

תודתנו לרב יואל קטן - ראש מכון שלמה אומן שע״י ישיבת שעלבים, ולרב פרופ׳ שלמה זלמן הבלין מהמחלקה לתלמוד של אוניברסיטת בר-אילן על הערותיהם החשובות למאמר.

נספח. הנוסחאות המתמטיות של ראב״ח ואנבלשום

בנספח זה נראה שראב״ח ואנבלשום משתמשים באותן נוסחאות לשם חישוב נפח כדור וחלקי כדור. לפירוט בנוגע לנוסחאות, ראה [6, עמ׳ 118 - 120] וכן [7, עמ׳ תכ״ז-תכ״ח].

1. נפח כדור שלם

ראב״ח ואנבלשום בונים את נוסחתם לנפח כדור שלם בשלבים. ראשית, הם מחשבים את שטח הכדור שהוא שטח המעטפת (הפָּנים) של הכדור:

$$\pi d^2 = 4\pi r^2$$

כאשר d הוא קוטר הכדור ו- r הוא רדיוסו.

בשלב השני, כדי לקבל את נפח הכדור, יש להכפיל את השטח שמצאנו בשישית הקוטר:

$$\frac{1}{6}d\pi d^2 = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{8}{6}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$ [17]

ראב״ח (חיבור המוה״ת, סעיף 178)	אנבלשום (תשב״ץ ח״א סימן קסד)
ותשבורת הכדור כאשר זכרו אנשי חוכמת השיעור,	וכן שאלת לדעת תשבורת כל גשם הכדור.
שתהיה מרבע את קוטר הכדור	כפול כל הקוטר על עצמו,
ותכפול המרובע הזה ג׳ פעמים ושביעית פעם	והעולה כפלהו על שלוש ושביעית,
ויעלה בידך משיחת שטח הכדור,	וזהו כל הקוטר על כל ההיקף למבין, ויעלה לך שטח הכדור.
מנה אותו בשישית הקוטר,	כפול אותו בשישית הקוטר,
ויעלה בידך תשבורת גוף הכדור.	ויהיה תשבורת כל גשם הכדור.

2. נפח חצי כדור

כמו בנוסחת כדור שלם שהובאה לעיל, גם במקרה של נפח חצי כדור, הנוסחה נבנית בשלבים:

א. ראשית, מחשבים את שטח חצי הכדור:

$$\pi d \cdot \frac{d}{2} = \pi \cdot \frac{d^2}{2} = 2\pi r^2 .$$

ב. בשלב שני, מחשבים את נפח חצי הכדור על ידי הכפלת השטח בשישית הקוטר:

$$\frac{1}{6}d\pi \cdot \frac{d^2}{2} = \frac{1}{12}\pi d^3 = \frac{8}{12}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3 .$$

ראב"ח (חיבור המוה"ת, סעיף 179)

כגון בריכת מים אשר גופה מבפנים מעוגל ופיה עגול ורוחבו שבע ואמצעיתו עמוק שלוש אמות וחצי, תדע כי הבריכה הזאת חצי כדור היא.

ובוא ומנה עומקה ברוחב פיה אשר הוא קוטר הכדור,

והנקבץ בידך כפלהו ג' פעמים ושביעית פעם כאשר עשית בכדור, ויעלה בידך ע"ז והוא משיחת שטח הבריכה הזאת.

מנה אותו בשתות הקוטר יהיה צ' פחות שתות, והוא תשבורת הבריכה אשר היא חצי כדור.

אנבלשום (תשב"ץ ח"א סימן קסד)

שאלתך היא כאשר יהיה מקוה או חפירה כדמות חצי כדור, וביקשת לדעת כמה מחזיק בדרך חכמי השיעור.

כפול הקוטר על העומק שהוא חצי הקוטר,

והעולה כפלהו על שלושה ושביעית, ויעלה לך שטח חצי הכדור.

כפול אותו על שישית הקוטר, והוא תשבורת גשם חצי הכדור, או המקוה או החפירה שהיא כדמות חצי הכדור

.

3. נפח חלקי כדור

גם נוסחת נפח כלי שצורתו היא חלק מכדור נבנית בשלבים:

א. בשלב הראשון, מוצאים את קוטר הכדור: $d=\frac{a^2}{h}+h$, באשר a הוא הרדיוס של פי הכלי.

ב. בשלב שני מוצאים את שטח פני הכלי: $dh\cdot 3\frac{1}{7}$.

ג. בשלב האחרון, מחשבים את נפח הכלי: $dh\cdot 3\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}d=d^2h\cdot\frac{11}{21}$.[18]

ראב"ח (סעיפים 123 ו-180)

ואם אתה יודע את המיתר ואחד מן החיצים ותרצה לדעת את הקוטר,

הוי מרבע את חצי המיתר,

וחלק מרובעו על החץ אשר ידעת,

ותמצא החץ השני,

ושני החיצים יחד הן אורך הקוטר.

ואילו היה העומק פחות מחצי הרוחב היית יודע שהבריכה הזאת מעוטה ממחצית הכדור כאשר ראית בשברון העגולות בשער השני מן החיבור הזה, כגון בריכה עגולת הגוף אשר עומקה ב' אמות ורוחב עגולת פיה גדר ארבעים שהוא ו' וכגון שליש; ואתה יודע שהבריכה הזאת אין בה חצי כדור מפני שעומקה פחות ממחצית

אנבלשום (תשב"ץ ח"א סימן קסד)

תוספת לקח. אם יהיה לך מקוה או חפירה כדוריי פחות או יותר מחצי הכדור, דע תחילה קוטר הכדור,

וזה כשתכפול חצי הרוחב בעצמו,

והעולה חלקהו על העומק,

ויצא לך מחצית הקוטר,

הוסף עליו העומק, ויעלה לך כל הקוטר.

רוחב פיה. ואם אתה מוציא את קוטרה כאשר למדת בשער הב׳ תמצאנו ז׳;

ובא ומנה שנים אשר הוא העומק, בז׳ אשר הוא קוטר הכדור, יהיה י״ד;

כפול אותן ג׳ פעמים ושביעית פעם,

יהיה משיחת שטח הבריכה;

מנה אותו בשתות הקוטר והוא אחד ושתות,

יהיה כ״א ושליש, והוא תשבורת גוף הבריכה.

אחר כך כפול העומק בכל הקוטר,

והעולה כפלהו על שלוש ושביעית,

והוא שטח הגשם או החפירה או המקוה.

כפול השטח הזה בשישית הקוטר,

והוא תשבורת הגשם או החפירה או המקוה שיהיו קצת מהכדור.

מקורות

[1] שרגא אברמסון, **עניינות בספרות הגאונים**, הוצאת מוסד הרב קוק, ירושלים תשל״ד.

[2] יצחק בער, **תולדות היהודים בספרד הנוצרית**, כרך ראשון, הוצאת עם עובד, תל-אביב תש״ה.

[3] יחיאל מיכאל הכהן גוטמן (עורך), **חיבור המשיחה והתשבורת** לראב״ח הנשיא, חברת מקיצי נרדמים, ברלין תרע״ד (1913).

[4] יקותיאל גינצבורג, **כתבים נבחרים**, הוצאת מ. ניומן, תל-אביב/ירושלים תשכ״א.

[5] דוד גרבר, **עמוד המוטל לאויר**, מגל י״א (תשנ״ה), עמ׳ 135 - 155.

[6] דוד גרבר ובועז צבאן, **כל שיש בהיקפו**, הגיון ג׳ (תשנ״ו), עמ׳ 103 - 131.

[7] ------, **קונטרס חשבונות התשב״ץ**, מופיע ב [**15**, עמ׳ תכג-תמו].

[8] ------, **אברהם בר חייא הנשיא - אב המון גויים: השפעתו על מחשבת ישראל ואומות העולם**, בהכנה.

[9] ------, *The Proof of Rabbi Abraham Bar Hiya Hanasi*, בהכנה.

[10] ------, *A mechanical derivation of the area of a sphere*, נשלח לפרסום.

[11] קורט ווגל, *Fibonacci, Leonardo or Leonardo of Pisa*, **Dictionary of Scientific Biography**, כרך 4, Chas. Scriber's Sons, ניו יורק 1970, עמ׳ 604 - 613.

[12] יצחק אייזק לייב (עורך), **הגיון הנפש (ספר המוסר)** לראב״ח הנשיא, לייפציג תרכ״ה (1860), נדפס מחדש ירושלים תשכ״ז.

[13] אבינועם סולימאני, **פירוש ל״איל משולש״**, בהכנה.

[14] גד בן-עמי צרפתי, **מונחי המתמטיקה של ״משנת המידות״**, לשוננו כ״ג (תשי״ט), עמ׳ 156 - 171.

[15] הרב יואל קטן (עורך), **ספר התשב״ץ**, חלק א׳, מהדורת מכון שלמה אומן שע״י ישיבת שעלבים ומכון ירושלים, ירושלים תשנ״ח.

[16] הרב יואל קטן, **מבוא לספר התשב״ץ**, [**15**, עמ׳ 19 - 59].

[17] זכריה שווארץ (עורך), **איגרת רבי אברהם ב״ר חייא הנשיא**, אוצר שאלות ותשובות ופסקים, ט״ז, תשנ״ד.

[1] שמו הלטיני: Abramo Savasorda, או Abraham Judaeus.

[2] פלטו מטיבולי הוא מחשובי המתרגמים הנוצרים של ספרד בתקופה הנדונה.

[3] למשמעות המלה "חיבור" ראה [**1**, עמ' 315-316].

[4] לפרטים על ההוכחה, הביקורת עליה וביסוסה המתמטי ראה [**6**, **9**, **10**].

[5] ראשי תיבות: **ת**שובות **ש**מעון **בן צ**מח.

[6] ספרד 1361 - אלגיר 1444. לפרטים על החיבור ומחברו ראה [**16**].

[7] גם בשו"ת מהרי"ט (לרבי יוסף טראני, צפת 1568 - קושטא 1639) חלק ב' יורה דעה סימן ו' נתקשה בענין זה [**5**].

[8] מדברי אנבלשום משתמע שיש אמה קטנה בת חמישה טפחים ואמה גדולה בת שישה טפחים. וראה התייחסות רשב"ץ לענין זה [**15**, סימן קסה ליד הערה 229].

[9] הערך השמאלי ננקט על ידי ראב"ח, והקירוב הימני הוא של אנבלשום. ראה להלן בדבריהם.

[10] ראה למשל בתחילת תשובה קעב, שפותחת במלים 'כתבת עד כאן דבריך' [**15**, עמ' שעז-שעח].

[11] ייתכנו מספר הסברים לשגיאה זאת. א. הביטוי הנכון 'פחות תשעה חלקים מעשרים ושתיים' התחלף ב'שתי תשיעי אמה' [**7**, עמ' תל"ט, בהתיחסות להערה 212]. ב. ייתכן שזו תוצאה של שתי שגיאות רצופות: האחת, שהוא הוסיף את עובי השפה לקוטר במקום לחסרו, והשניה, שהוא הוסיף את העובי מצד אחד בלבד - במקרה כזה מקבלים תוצאה קרובה ל 72+2/9 (תודתנו לד"ר א. שמואל דהרי על הצעת ההסבר הזה).

[12] בשני המקורות, הטעות נגררת עד סוף החישוב. עובדה זו מהווה חיזוק נוסף ומשכנע לטענתנו שמקור דברי אנבלשום הוא בדברי ראב"ח, שהרי בלתי סביר לחלוטין ששיבוש כזה קרה בנפרד אצל כל אחד משני חכמים אלו.

[13] הם מסבירים זאת בכך שחז"ל נקטו חומרה מסויימת, כי לפי שישה טפחים באמה נקבל נפח גדול יותר לים, וזה יגדיל את נפח המקווה (באמות מעוקבות) הנובע מכאן.

[14] אנבלשום כאן לוקח קירוב מעט פחות טוב: שבעים ושלוש אמות רבועות.

[15] כאן כדאי להעיר שרשב"ץ תקף את שיטת אנבלשום במלים חריפות: 'ואתה באת בפלפולך לעשות תיקון אחר מסכים אל המופת, ורפואתך לא הצליחה, והחולה נשאר נופל על המיטה, והוא הכחשת הכתובים, אלא שברפואתך ניתק מחולי לחולי יותר כבד, שהחולי הראשון היה בשיעור הדבר הנמדד, והחולי השני הוא בתמונת המידה אשר הוא יותר ניגלה ונראה לעיניים מהראשון, שהכתוב האחד אומר שלא היה שווה אבל תחתונו מרובע ועליונו עגול, וכתוב אחד אומר שממטה למעלה היה מרובע, ודברי שניהם בכלי אחד, ששני הסיפורים בים שעשה שלמה הם, וזה אומר בכה וזה אומר בכה' [**15**, סימן קעב]. יתכן שהסיבה לתגובה חריפה זו של רשב"ץ היא שמדברי אנבלשום נראה, שהוא מציע לפרש באופן שונה את צורת הים במלכים ובדבה"י, וזה לא התקבל על דעתו של רשב"ץ. אולם מדברי ראב"ח נראה ברור שגם הכתוב בדבה"י מסכים שחלקו העליון של הים היה עגול, אלא שהוא חישב את הנפח של ים מרובע על מנת ללמדנו את יחס הנפחים בין תיבה לגליל. בהנחה שלכך התכוון גם אנבלשום, סרה טענת רשב"ץ נגדו בעניין זה.

[16] בנספח למאמר זה נראה, שגם הנוסחאות המתמטיות, שבהן הם משתמשים, זהות.

[17] בדברי אנבלשום ביתר הנוסחאות שנראה להלן הוא מוסיף: 'או המקוה או החפירה', ונראה שהסיבה שבנוסחה זו הוא לא הוסיף זאת היא מפני שלא קיימים מקוה או חפירה שהם בצורת כדור שלם.

[18] הנוסחה המתקבלת אינה מדוייקת. ראב"ח (ואנבלשום, ייתכן שבעקבות ראב"ח) סובר שהכפלת שטח הפנים בשישית הקוטר נותנת את נפח הכדור הקטום. טענה זאת נכונה רק עבור חצי כדור וכדור שלם. לפירוט ראה [**6**, עמ' 119 - 120; **7**, עמ' תכ"ח].