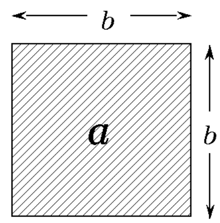
שיטת הרבנים סתהון לחישוב שורשים

יאיר הלוי, דוד גרבר ובועז צבאן
המחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב, אוניברסיטת בר-אילן
ומכללות צפת, יו״ש ואשקלון

א. השורש ומספרים בלתי גדורים

שורש מרובע של מספר חיובי a הוא מספר חיובי b כך ש-$b^2:=b\cdot b=a$ (מסמנים $b=\sqrt{a}$). באופן ציורי, b הוא אורך צד אחד של גדר המקיפה שדה ריבועי ששטחו a :



לפיכך, לדעת גינצבורג [1, עמ׳ 76, הערה 24], קראו חכמי ימי הביניים לשורש המרובע בשם ״גדר״, ולחשבון שעל ידיו מוצאים את השורש המרובע קראו ״גדירה״[1].

המספר a נקרא ״גדור״ (או ״נגדר״) אם יש לו שורש רציונלי[2]. כבר היוונים הקדמונים ידעו שיש מספרים בלתי גדורים (כמו המספר 2), והדים לכך אנו מוצאים במקורות שלנו: רמב״ם[3] אומר, שהמספר 5000 אינו גדור[4]. הרב אבן עזרא[5] אומר: ״ואם יתהלל חכם בחכמת הספירות, הנה דבר קל, והוא לדעת שורש שנים, הנקרא גדר, אין כוח אדם לדעתו״.

הקדמונים הציעו שיטות רבות ומגוונות למציאת קירובים רציונליים עבור השורש של מספרים בלתי גדורים, וגם האחרונים עסקו בשאלה זו, מתוך הכללתה למקרים רבים נוספים. במאמר זה נציג חלק מהשיטות[6].

הערה ביבליוגרפית

הרבנים סתהון

הרב מנשה מטלוב סתהון: מחכמי ארץ ישראל שעלו מארם-צובא. רב ומו״צ בארם-צובא (חאלב). עלה לארץ בתרל״ד (1874), ושימש כראב״ד הספרדים בצפת. נפטר בכ״ד אלול תרל״ו (1876). ספריו: ״כנסיה לשם שמיים״, ״פרחי שושנים״, ״כיבוד אב״ ו״כללי הדקדוק״ [6].

הרב חיים בר מנשה סתהון: מחכמי ארץ ישראל. נולד בצפת בשנת תרל״א (1871). משנת תרס״ב (1902) רב ראשי בצפת. מתרס״ה (1905) פרש מהרבנות ועסק בתורה. נפטר בו׳ באייר תרע״ו (1916). ספרו ״ארץ חיים״ הוא מספרי היסוד של מנהגי ארץ ישראל [7].

ב. קירובים לשורשי מספרים בלתי גדורים

הקירוב הראשון בו נדון מובא על ידי הרב חיים סתהון[7]. הקירוב מובא כאשר הוא נדרש למצוא שורש למספר 32, לשם הסבר סוגית ״סוכה העשויה ככבשן״[8]:

> אם תרצה לידע שורש מספר הבלתי נגדר בקירוב, תדע מספר הנגדר היותר קרוב לו לפניו וכן מספר הנגדר היותר קרוב לו מאחריו, ועל פיהם תדע בקירוב שורש מספר המבוקש לפי מה שהוא עודף על מספר הקודם לו או פוחת ממה שאחריו. המשל ... רצינו לידע שורש מספר ל״ב, הנה מספר נגדר הקרוב לו מלפניו הוא כ״ה ושורשו ה׳, והנגדר שאחריו הוא ל״ו וביניהם י״א, ולפי שמספר ל״ב הוא עודף על הכ״ה ז׳, אם כן יהיה שורשו ה׳ שלימים וז׳ חלקים מי״א בשלם. או כלך לדרך זו, שורש הל״ו הוא ששה ולפי שמספר ל״ב חסר מן הל״ו ארבעה, אם כן יהיה שורש הל״ב ששה שלימים חסר ד׳ חלקים מי״א בשלם.

* גירסה קודמת של מאמר זה הופיעה ב״מקרומטיקה״ מס׳ 2, הוצאת מחמ״ד מחוז מרכז, תשנ״ח, עמ׳ 29 – 34.

כלומר, חישוב שורש של מספר בלתי גדור k, נעשה באופן הבא: מוצאים מספר שלם n כך שמתקיים $n^2<k<(n+1)^2$, ואז המקורב הוא $\sqrt{k}$ הוא $n+\frac{k-n^2}{(n+1)^2-n^2}$ או $(n+1)-\frac{(n+1)^2-k}{(n+1)^2-n^2}$ (שים לב ששני הערכים שווים).

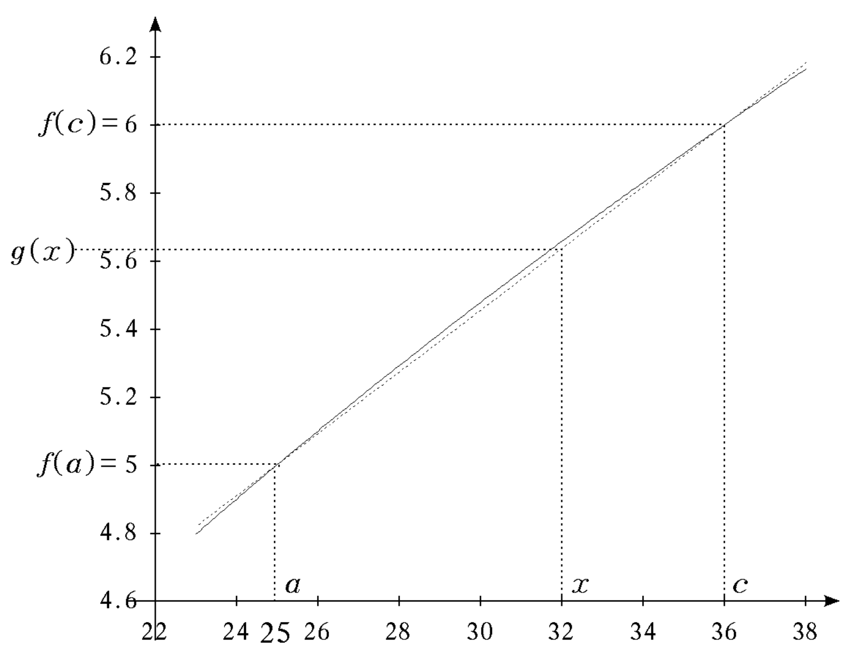
ההגיון מאחורי שיטה זו מובא בהמשך דבריו:

> והטעם לזה פשוט שמאחר ששורש הכ"ה הוא ה' ושורש הל"ו ו', אם כן ידענו שבעבור הי"א העודפים בל"ו על כ"ה ניתוסף השורש אחד שלם, אם כן לכל אחד שנוסף על הכ"ה – ראוי שיוסיף שורשו על שורש הכ"ה אחד מי"א בשלם, וכן לכל אחד שנגרע מל"ו – ראוי שיפחות שורשו משורש ל"ו אחד מי"א בשלם. וכבר הודעתיך שכל זה על צד הקירוב.

כלומר, מדובר באינטרפולציה לינארית. שיטה זו היתה ידועה כבר בעבר הרחוק, אולם נשארה שימושית עד לעבר הקרוב מאד: היא נלמדה בבתי-הספר בדור שלפני מחשבוני הכיס, כאשר החישובים נעשו באמצעות טבלאות.[9]

לפי שיטה זו, אם ברצוננו לחשב ערך של פונקציה f בנקודה b, אנו מוצאים שתי נקודות a,c כך שאנו יודעים את $f(a),f(c)$ ומתקיים $a<b<c$. כעת, $f(b)$ מחושב בקירוב על ידי $f(b)\approx f(a)+\frac{f(c)-f(a)}{c-a}(b-a)$ או על ידי $f(b)\approx f(c)-\frac{f(c)-f(a)}{c-a}(c-b)$.

הפונקציה המקרבת $g(x)=f(a)+\frac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-a)$ מתארת את הישר העובר דרך הנקודות $f(a)$ ו-$f(c)$:



ומכאן מובן שם הקירוב "אינטרפולציה לינארית".

קירוב סתהון מתקבל כאשר $a=n^2, b=(n+1)^2$ ו- $f(x)=\sqrt{x}$:

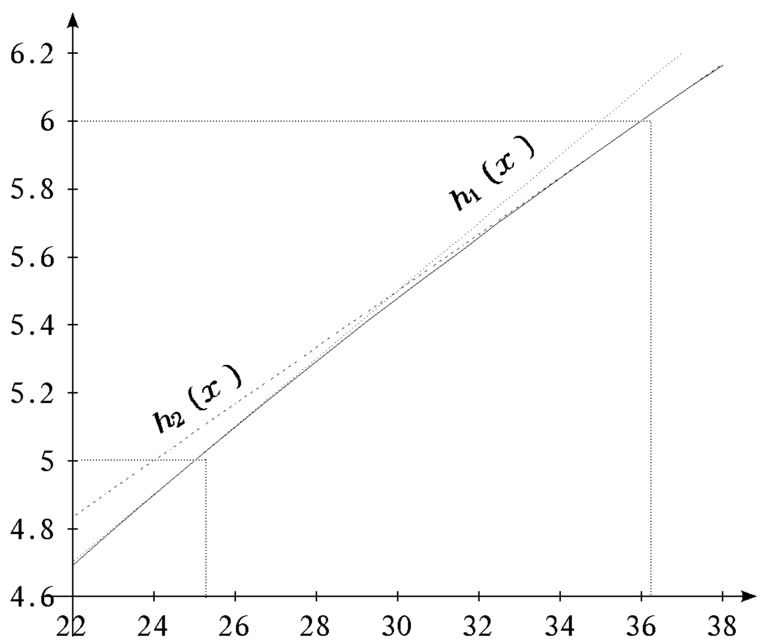
$$g(x) = \sqrt{n^2}+\frac{\sqrt{(n+1)^2}-\sqrt{n^2}}{(n+1)^2-n^2}(x-n^2) = n+\frac{x-n^2}{(n+1)^2-n^2}$$

בעזרת חשבון דיפרנציאלי קל לראות שהשגיאה המירבית מתקבלת בנקודה $x=(n+\frac{1}{2})^2$, והיא שווה שם ל- $-\frac{1}{8n+4}$. נשים לב שביטוי זה שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף. משמעות הדבר היא, שהקירוב טוב יותר ככל שהמספר שברצוננו לגדור גדול יותר (n הוא הערך השלם של $\sqrt{x}$). גם עניין זה מובא בדברי הרב סתהון:

> ודע שיש אופן לצמצם ולדקדק יותר השורש ולהתקרב יותר אל האמת על ידי שתוסיף על המספר המבוקש שורשו זוגות סיפרי"ש וכמו שכתבו הראשונים ז"ל וכל מה שתוסיף יותר זוג סיפרי"ש – תתקרב יותר אל האמת, אבל לעולם אי אפשר לעמוד על האמת בכיוון אפילו אם תוסיף לבלי תכלית, ולכן אין ראוי למחשב לטרוח יותר.

כלומר, כדי לחשב את $\sqrt{x}$ בדיוק רב יותר, נחשב את $\sqrt{100x}$ ואחר כך נחלקו ב- 10, לקבלת $\sqrt{x}$. ככל ש"נוסיף זוגות אפסים" (כלומר, נכפול בחזקה גדולה יותר של 100), נקבל קירוב טוב יותר.

מעניין להשוות קירוב זה לקירוב מוכר אחר: הקירוב הדיפרנציאלי. בקירוב זה, הפונקציה המקרבת היא $h(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$. קירוב זה מייצג את הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה a :



אצלנו $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ולכן הקירוב סביב n^2 הוא:

$$h_1(x) = n+\frac{1}{2n}(x-n^2) = n+\frac{x-n^2}{2n}$$

ואילו סביב $(n+1)^2$ הקירוב הוא:

$$h_2(x) = (n+1)-\frac{1}{2(n+1)}(-x+(n+1)^2) = (n+1)-\frac{(n+1)^2-x}{2(n+1)}$$

נשים לב, שההבדל היחיד בין הקירוב $h_1(x)$ לקירוב סתהון הוא, שהמכנה של $h_1(x)$ הוא $2n$, בעוד שבקירוב סתהון המכנה הוא $2n+1$.

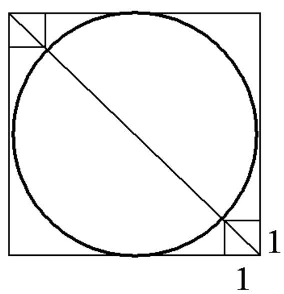
נעריך את טיב הקירוב הדיפרנציאלי. כמו שרואים בציור לעיל, הגרפים של $h_1(x)$ ו-$h_2(x)$ נחתכים; והנקודה x_0 שבה הם נחתכים קובעת היכן עדיף כל אחד מהקירובים: משמאל ל-x_0 עדיף $h_1(x)$, ומימין ל-x_0 עדיף $h_2(x)$. קל לראות ש- $x_0=n(n+1)$. מתקבל איפוא קירוב חדש:

$$h(x)=\begin{cases} h_1(x) & n^2\le x\le n(n+1) \\ h_2(x) & n(n+1)\le x\le (n+1)^2 \end{cases}$$

השגיאה המירבית בקירוב זה מתקבלת בנקודה $n(n+1)$ [10], והיא שווה ל- $(n+\frac{1}{2})-\sqrt{n(n+1)}$, או בכתיבה אחרת: $\frac{1}{4n+4\sqrt{n(n+1)}+2}$. וערך זה גדול מהשגיאה המקסימלית $\frac{1}{8n+4}$ בשיטת סתהון (בדוק!), כלומר בהסתכלות גלובלית, שיטת סתהון עדיפה!

ג. הסבר סוגיות תלמודיות-מתמטיות באמצעות קירוב סתהון

הרב סתהון (שם) משתמש בקירוב האינטרפולציה הלינארית לפתרון סוגיית "סוכה העשויה ככבשן" ברמת דיוק של 100% [5]. נראה, שבעזרת שיטת סתהון שלמדנו בפרק הקודם, אפשר לפתור את אחת התעלומות הגדולות שבין הנושאים המתמטיים בספרות חז"ל: משנת "עמוד שהוא מוטל לאויר"[11]. במשנה זו נאמר, לפי הפשט, שכדי שיהיה חסום תחת העמוד העגול ריבוע בגודל טפח על טפח, דרוש שהיקפו יהיה 24 טפחים.



במאמר [3] מובאים הנסיונות השונים להתמודד עם משנה זו, ומסיקים הכותבים: "הנסיונות המתמטיים וכל ההתחשבויות בפרמטרים נוספים לא הועילו לתת פתרון מושלם מבחינה מתמטית. על כורחנו להיזקק או לסברות ... או להעמדות מתמטיות שהן דחוקות יותר" [3, עמ' 153]. אם כך, המאמר נשאר, למעשה, ב"צריך עיון". הפתרון שנציע כאן מבוסס על שילוב שלש שיטות, שהובאו בהקשרים אחרים, של חכמים שהתמודדו עם סוגיות מתמטיות.

הראשונה היא שיטת הרשב"ץ (שו"ת התשב"ץ, חלק א', סימן קס"ה), לפיה גם בסוגיות מתמטיות נהגו חכמים על פי הכלל "לעולם ישנה אדם לתלמידו בדרך קצרה" (פסחים דף ג' ע"ב): בכל פעם שמסרו החכמים לתלמידיהם כלל מתמטי, הם השתמשו בקירוב פשוט שקל לזוכרו, אולם כאשר נדרש להפעיל את ההלכה "למעשה", נדרשו הבקיאים להפעיל את הכלל עם קירובים מדויקים יותר.

השניה היא שיטת יקותיאל גינצבורג [2]. לפי שיטה זו, כאשר יש דרך לעדן קירוב, השתמשו חכמים בקירוב הראשון בשנותם את הכללים, עם ההבנה שכאשר רוצים לשפר את הדיוק של הכלל, מציבים בכלל קירוב מעודן יותר. שיטה זו היא למעשה מקרה פרטי של שיטת התשב"ץ, אך דווקא בכך היא מקרבת אותנו יותר לפתרון שנציע.

השלישית היא, כמובן, שיטת סתהון לחישוב שורשים. שיטה זו, כפי שראינו, מספקת גם דרך לעדן את הקירוב (על ידי כפל ב- 100 לפני חישוב השורש). לפיכך, נוכל להשתמש בה בהתאם לדברי הרשב"ץ וגינצבורג.

תחת העמוד יש לחסום ריבוע 1x1 (ראה בציור לעיל), אורך האלכסון של ריבוע כזה הוא $\sqrt{2}$. נשחזר את הקירוב של $\sqrt{2}$ מתוך המשנה[12], בהנחה שהערך שנבחר עבור π היה 3, שהוא הערך הפשוט ביותר עבור π, ומופיע בכל הדיונים הגאומטריים של חז"ל.

- ההיקף שננקט במשנה הוא 24, ולכן הקוטר הוא $\frac{24}{\pi}$, ובקירוב $8=\frac{24}{3}$.
- אלכסון הריבוע החוסם הוא, מחד – $8\sqrt{2}$ (אלכסון ריבוע 8x8), ומאידך – $8+2\sqrt{2}$ (קוטר העמוד ועוד אלכסוני הריבועים הקטנים). לכן, $8\sqrt{2}=8+2\sqrt{2}$, ומכאן $\sqrt{2}=\frac{4}{3}$, כלומר: הקירוב ל $\sqrt{2}$ שבו השתמש התנא הוא $\frac{4}{3}$.

נראה שזה הקירוב הפשוט ביותר על פי שיטת הרב סתהון:

$$1^2=1<2<4=2^2 \Rightarrow \sqrt{2}\approx 1+\frac{2-1}{4-1}=\frac{4}{3}\ !$$

כעת, יש להבין את דברי התנא כך: על היקף העיגול להיות מספיק גדול, כך שיכסה ריבוע 1x1 כבציור, **למשל** אם ניקח $\pi=3$ ו $\sqrt{2}=\frac{4}{3}$, ההיקף הדרוש הוא 24. ואם תרצה **ליישם** כלל זה, השתמש בערכים מדויקים יותר עבור π ועבור $\sqrt{2}$, בעזרת השיטה שמתאר הרב סתהון.

למשל, קח $\pi=3\frac{1}{7}$, ו $\sqrt{2}$, לפי שיטת העידון של סתהון: נכפיל ב- 100 לקבל 200; נמצא את הקירוב:

$$14^2=196<200<225=25^2 \Rightarrow \sqrt{200}\approx 14+\frac{200-196}{225-196}=14+\frac{4}{29}$$

נחלק ב- 10 לקבל $\sqrt{2}\approx\frac{7}{5}+\frac{4}{290}$. כמו קודם, קוטר המעגל צריך לקיים $d+2\sqrt{2}=d\sqrt{2}$. אם נציב את הקירוב שחישבנו נוכל לחלץ ... $d\approx\frac{41}{6}=6.8333$, וההיקף יהיה $\pi d\approx\frac{22}{7}\cdot\frac{41}{6}=\frac{451}{21}\approx 21.476$.

וכן על זה הדרך תוכל לשפר את הקירוב לפי מידת הצורך.

רוב תודות

לר' אורי ברנס, שנסיונו הרב בהוראה ואופקיו הרחבים סייעו לנו להתאים את המאמר לטעמם של מורי המתמטיקה.

הערות

1. רעיון זה מעניין אך אינו מוכרח. ייתכן שמקור המלה "גדר" הוא המלה הערבית جذر (ג'ד'ר), שמשמשת באותה הוראה (שורש) [10, עמ' 21].
2. כלומר שורש מהצורה $\frac{m}{n}$, כאשר m ו- n מספרים שלמים.
3. בפירוש המשניות עירובין, פרק ב' משנה ה'.
4. מעניין לציין שטענה זו שקולה לטענה ש 2 אינו גדור (ראה [9, עמ' 128 הערה 7; 3, עמ' 140–141]). וראה גם בשו"ת "חוות יאיר" סימן קע"ב.
5. בפירושו הקצר, שמות כ"ג, כ.
6. שיטה שבה לא נעסוק במסגרת מאמר זה היא שיטת משה מאירסון, המופיעה במאמרו הנפלא של יקותיאל גינצבורג [2]. יקחהו הקורא משם וינעם לו.
7. בספרו "ארץ חיים", בפרק "כיבוד אב". שיטת הקירוב מובאת בשם אביו הרב מנשה מטלוב סתהון (ראה מסגרת בסוף המאמר).
8. סוכה דף ח'. עיין [5; 8].
9. מורים הרוצים לשתף תלמידיהם בהבנת השיטה, יוכלו להציג את הבעיה כך: בשעה 5 נכנס למרפאה אדם שמספר פתקית התור שלו הוא 25. בשעה 6 נכנס למרפאה אדם שמספר פתקית התור שלו הוא 36. באיזו שעה, בערך, נכנס זה שמספר פתקית התור שלו 32? מהירות התשובה של הקטנים מפתיעה ...
10. בעזרת חשבון דיפרנציאלי אפשר לראות, שהפונקציה $h_1(x)-\sqrt{x}$ עולה עבור $n^2<x$, והפונקציה $h_2(x)-\sqrt{x}$ יורדת עבור $x<(n+1)^2$.

11. אהלות פרק י״ב משנה ז׳. לתיאור הדיון ראה [3].
12. שיחזור זה מבצעים גם צוקרמן [17], ובעקבותיו פלדמן [16], אולם הם לא מצאו הסבר מניח את הדעת לתוצאה שקיבלו. וראה [3, שיטת ב. צוקרמן, עמ׳ 151].

רשימת מאמרים מרוכזת

[1] **לתולדות המתמטיקה העברית**, יקותיאל גינצבורג, מתוך: יקותיאל גינצבורג-כתבים נבחרים, הוצאת ספרים מ. ניומן, תל-אביב/ירושלים, תשכ״א, 54-104.
[2] **יעקב משה מאירסון**, יקותיאל גינצבורג, מתוך: יקותיאל גינצבורג-כתבים נבחרים, 194-228.
[3] **עמוד שהוא מוטל לאויר**, דוד גרבר (בהנחיית הרב שמעון וייזר), מגל י״א, המכון הגבוה לתורה שע״י אוניברסיטת בר-אילן, תשנ״ה, 135-153.
[4] **סוכה עגולה**, דוד גרבר ובועז צבאן, מגל י׳, המכון הגבוה לתורה שע״י אוניברסיטת בר-אילן, רמת גן, תשנ״ד, 117-134.
[5] **סוכה עגולה (ב)**, דוד גרבר ובועז צבאן, מגל י״א, המכון הגבוה לתורה שע״י אוניברסיטת בר-אילן, תשנ״ה, 127-134.
[6] **אטלס עץ חיים**, הרב רפאל הלפרין, אחרונים(ד), חלק א׳, הוצאת הקדש רוח יעקב, תל אביב, תשמ״ד, עמ׳ 171.
[7] **אטלס עץ חיים**, הרב רפאל הלפרין, אחרונים(ה), חלק א׳, הוצאת הקדש רוח יעקב, תל אביב, תשמ״ז, עמ׳ 122.
[8] **כוורת**, בועז צבאן ודוד גרבר, המעין ל״ה ג׳, מוסד יצחק ברייער של פועלי אגודת ישראל, ירושלים, ניסן תשנ״ה, 57-69.
[9] **כל שיש בהיקפו**, בועז צבאן ודוד גרבר, הגיון ג׳, אלומה, תשנ״ו, 103-131.
[10] **מונחי המתמטיקה של "משנת המידות" - חלק ב׳**, גד בן-עמי צרפתי, לשוננו כ״ד, ועד הלשון העברית בארץ ישראל, ירושלים, תש״ד, 73-94.
[11] **על היחס שבין היקף עיגול לקוטרו**, בועז צבאן, סיני קי״ז, כסלו-טבת תשנ״ו, קפ״ו-קצ״א.
[12] **סוגיות גאומטריות בספרות חז״ל**, בועז צבאן ודוד גרבר, הגיון ד׳, אלומה, תשנ״ז, 4-17.
[13] **קונטרס חשבונות התשב״ץ**, דוד גרבר ובועז צבאן, נספח לשו״ת התשב״ץ, חלק א׳, מהדורת מכון שלמה אומן שע״י ישיבת שעלבים ומכון ירושלים, תשנ״ח, עמ׳ תכ״ג-תמ״ו.
[14] **שיפוע כבש המזבח**, בועז צבאן ודוד גרבר, מתמטיקה בחמ״ד, תשנ״ח (בדפוס).
[15] **מקור קדמון לשיטת אנבלשום אפרים בשו״ת התשב״ץ בענין ים שעשה שלמה**, דוד גרבר ובועז צבאן (בהכנה).

[16] **Rabbinical Mathematics and Astronomy**, Williams Moses Feldman, Hermon Press, New-York: 1931.
[17] **Das Mathematische im Talmud**, Benedict Zuckermann, Hepner, Breslau: 1878.
[18] **On the Rabbinical Approximation of** π, Boaz Tsaban and David Garber, Historia Mathematica **25** (1998), pp. 75-84.
[19] **A mechanical derivation of the area of the sphere**, David Garber and Boaz Tsaban (in preparation).
[20] **The proof of Rabbi Abraham bar Hiya**, Victor .J. Katz, Boaz Tsaban and David Garber (in preparation).