קונטרס חשבונות התשב"ץ

דוד גרבר ובועז צבאן

תקציר. בנספח זה נסביר את החלק המתמטי של סימנים קכט, קסג–קסו ו–קעב בלשון מתימטית מקוצרת ובליווי איורים. בהערות נשווה את הערכים המקורבים המתקבלים בתשב"ץ לערכים המדוייקים הידועים כיום. כמו כן, נבדוק את שיטות החישוב המובאות בסימנים אלו.
בתחילת כמה מהסעיפים הוספנו דברי רקע בסיסיים, שאינם לקוחים מהתשובות. כמו כן, חלק מההוכחות ומההערות המתמטיות המובאות בנספח זה אינן מופיעות בתשובות. כדי להפיק את מלוא התועלת מנספח זה, יש לקרוא כל חלק ממנו בצמוד לחלק המתאים בתשובה עצמה. בשוליים הימניים של כל דף ציינו הפנייה להערה המתאימה בגוף התשובה.

קיצורים וסימונים

- בסוף נספח זה מצורפת רשימת מאמרים לעיון נוסף. הפניות למאמרים אלו מובאות בצורה [x, עמ' y], שמשמעותה: מאמר מספר x ברשימה, עמ' y. וכן על זה הדרך.
- א"מ פירושו אמות מעוקבות.
- הסימן $\approx$ פירושו שווה בערך (כלומר בקירוב).
- האות היונית π מבטאת את היחס שבין היקף עיגול לקוטרו. היחס המדוייק הוא π=3.14159..., והיחסים המקורבים המוזכרים בתשובות הם π=3 וכן $\pi=3\frac{1}{7}$.[1]
- עבור מספרים a ו–b, $a\cdot b$ פירושו "a כפול b". a בריבוע (מסומן a^2) פירושו $a\cdot a$.
- השורש של מספר x מציין את המספר שאם נכפול אותו בעצמו נקבל את x. מספר זה מסומן $\sqrt{x}$.

סימן קכט

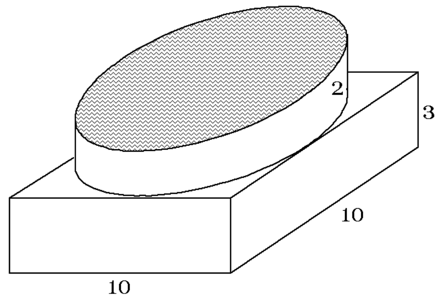
כל החישובים בסימן זה הם לפי קירובי חז"ל: π=3, ו–$\sqrt{2}=1\frac{2}{5}$.

1. נפח הים שעשה שלמה להערה 12*

נפח מקוה כשר הוא 3 א"מ, שהן 40 סאה. נפח הים שעשה שלמה הוא 2,000 בת. ה"בת" היא $\frac{1}{10}$ כור, והכור הוא 30 סאה. לכן נפח הים שעשה שלמה הוא $2,000\cdot\frac{1}{10}\cdot30=6,000$ סאה (או: 150 מקוואות, שהם 450 א"מ).

1. תיתכן מציאות שבה היחס בין היקף עיגול לקוטרו שווה ל–3 (ראה [7]). על הגישות ההלכתיות השונות ביחס לקירוב זה, ראה [2, עמ' 117–120], וכן [10].

להערה 25* **2. מבנה הים שעשה שלמה על פי הגמרא**[2]



נפח החלק התחתון (תיבה) הוא $10\cdot10\cdot3=300$ א"מ. שטח הבסיס של החלק העליון (גליל) הוא $\pi r^2=\pi\cdot5^2=25\pi$, ולכן נפח החלק העליון הוא $25\pi\cdot2=50\pi\approx150$ א"מ[3]. לכן, נפח הים כולו הוא $300+150=450$ א"מ[4], כדרוש.

הערה. רבנו מחשב את נפח הגליל אחרת. ראשית, הוא מחשב את נפח התיבה שגובהה 2: כיון שנפח תיבה בגובה 3 אמות הוא 300 א"מ, נפח תיבה בגובה 2 אמות הוא $\frac{2}{3}\cdot300=200$ א"מ. כעת, לפי כלל הגמרא, שטח עיגול חסום בריבוע קטן פי $\frac{\pi}{4}$ משטח הריבוע[5], ולכן גם נפח הגליל קטן פי $\frac{\pi}{4}$ מנפח התיבה. לפיכך, נפח הגליל הוא $\frac{\pi}{4}\cdot200\approx\frac{3}{4}\cdot200=150$ א"מ[3].

להערה 28* **3. שיעורי מקוה גלילי בעל נפח נתון**

הבעיה. מהו גובה מקוה גלילי שנפחו שווה לנפח של מקוה ריבועי בעל רוחב זהה?
פתרון. כיון ששטח הבסיס קטן פי $\frac{\pi}{4}$, יש להגדיל את הגובה פי $\frac{4}{\pi}$.

דוגמאות. שיעורי מקוואות שנפחם 3 א"מ:
א. כאשר רוחב הבסיס הוא 1 אמה, גובה המקוה הריבועי הדרוש הוא 3 (כי $1\cdot1\cdot3=3$), לכן גובה המקוה הגלילי הדרוש הוא $\frac{4}{\pi}\cdot3\approx4$ אמות[6].
ב. כאשר גובה המקוה הגלילי הוא 3 אמות, גובה המקוה הריבועי המתאים הוא $\frac{\pi}{4}\cdot3\approx\frac{9}{4}$. אם רוחב המקוה הוא a, צריך להתקיים $a^2\cdot\frac{9}{4}=3$, מכאן ש $a^2=\frac{4}{9}\cdot3=\frac{4}{3}$, ולכן $a=\sqrt{\frac{4}{3}}$, שהוא מעט פחות מ־$\frac{7}{6}$.[7]

2. לקמן בתשובת רבנו (סימן קסה, ליד הערה 222) נאמר: "ואין במקרא זכר למרובעות, אלא פירושן של חז"ל מפני ההכרח". בספר "מדות ומשקלות של תורה" (ירושלים תשמ"ה, פרק פט הערה 14) מציין הרב וייס, שרבי יוסי חולק על תנא קמא, ולדעתו לא היתה צורת הים שעשה שלמה כפי שנקבע בגמרא. נתייחס לכך עוד לקמן בנספח זה (סימן קעב הערה 4).

3. **השיעור המדוייק:** ...157.0796 **א"מ.**

4. **השיעור המדוייק:** ...457.0796 **א"מ.**

5. **ראה סעיף 4.**

6. **השיעור המדוייק:** ...3.8197 **אמות.**

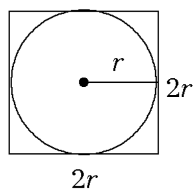
7. $\frac{7}{6}=1.16666...$. **השיעור המדוייק של** a **הוא:** ...1.128 **אמות.**

ג. כאשר רוחב הבסיס הוא 2 אמות, גובה המקוה הריבועי הדרוש הוא $\frac{3}{4}$ (כי $\frac{3}{4}\cdot 2^2=3$). לכן, גובה המקוה הגלילי הוא $\frac{4}{\pi}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{\pi}\approx 1$ אמות[8].

להערה 34

4. הכלל של חכמי יון

היקף מעגל שקוטרו d הוא $\pi d\approx 3d$ ($2\pi r=\pi\cdot 2r=\pi d$). לכן, שטחו של עיגול שווה למכפלת מחצית היקפו במחצית קוטרו.



הסבר. יהי r רדיוס המעגל. אזי

$$\underbrace{\frac{2\pi r}{2}}_{\text{חצי ההיקף}} \times \underbrace{\frac{2r}{2}}_{\text{חצי הקוטר}} = \pi r^2$$

πr^2 היא הנוסחה המקובלת בימינו.

דוגמא. שטח ריבוע 4×4 הוא 16. נמצא את שטח העיגול החסום בריבוע. קוטרו 4, לכן היקפו הוא $\pi\cdot 4\approx 12$, ולכן שטחו הוא $(\pi\cdot 4/2)\cdot(4/2)=4\pi\approx 12$.[9]

לפי הקירוב $\pi=3$, הכלל של חכמי יון מתאים לכלל הגמרא, ש"מרובע יתר על העיגול רביע", כי שטח מרובע שרוחבו d הוא d^2, ושטח העיגול המתאים הוא $\frac{\pi d}{2}\cdot\frac{d}{2}=\frac{\pi}{4}d^2\approx\frac{3}{4}d^2$. ואכן רואים זאת בדוגמא הנ"ל.

שיטת רבי שמואל. רבי שמואל אמר, שכלל הגמרא "מרובע יתר על העיגול רביע" אינו נכון לגבי השטח, אלא רק לגבי ההיקף. אמנם, לפי $\pi=3$ הכלל נכון עבור ההיקף (כי יחס ההיקפים הוא $\frac{\pi d}{4d}=\frac{\pi}{4}\approx\frac{3}{4}$), אולם כפי שראינו הוא נכון גם לגבי השטח.

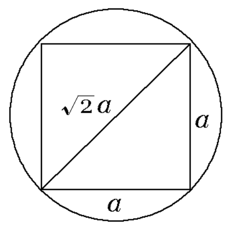
ראיות לכלל חכמי יון. רבנו לא פירש מהן הראיות, אולם יתכן שכוונתו להוכחה המובאת בסימן קסה (נביא הוכחה זאת, בליווי ציור והסברים, בדיון על סימן קסה, סעיף 3).

8. השיעור המדוייק: ...0.9549 אמות. וראה להלן בנספח על סימן קסה, סעיף 15ב והערה 41 שם, על שיטת הרשב"א בהכשר מקוה כזה.

9. השיעור המדוייק: ...12.566.

להערה 39 **5. הקוטר של מקוה גלילי כשר**

כדי שמקוה גלילי יהא כשר, דרוש שבסיסו יהא מספיק גדול כדי להכיל ריבוע של אמה על אמה. לפי משפט פיתגורס, האלכסון של ריבוע ברוחב a הוא $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\cdot a\approx 1\frac{2}{5}\cdot a$. במקרה שלנו, $a=1$ ולכן האלכסון הוא $\sqrt{2}\approx 1\frac{2}{5}$ אמה[10], וזהו בדיוק קוטר העיגול החוסם:



להערה 57 **6. נפח מקוה בצורת חצי כדור**

ראה בהמשך, בדיון בסימנים קסג–קסד.

סימן קסג

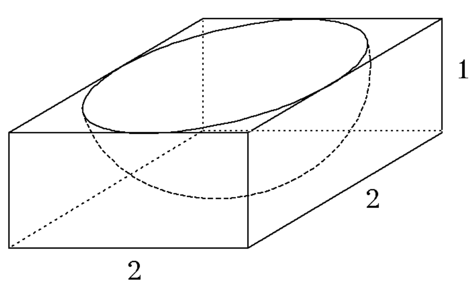
גם הקירובים בסימן זה הם לפי $\pi=3$.

להערה 10 **1. השמועה מפי רבו**

נפח כדור שווה למכפלת קוטרו בהיקפו, כלומר $2r\cdot 2\pi r=4\pi r^2$ (כאשר r הוא רדיוס הכדור).
לפי זה, נפח חצי כדור הוא $2\pi r^2$.

להערה 12 **2. הפרכת השמועה**

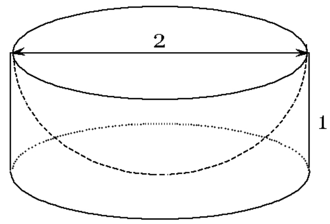
נתבונן בכדור שקוטרו 2 אמות. לפי השמועה הנ"ל, נפח מחצית הכדור הוא $2\pi\cdot 1^2\approx 6$ א"מ[1] שהן כשני מקוואות.. אבל אפילו התיבה החוסמת (ראה ציור) אינה מגיעה לנפח כזה: נפח התיבה הוא $2\cdot 2\cdot 1=4$ א"מ, שהן מקוה ושליש.



10. $1\frac{2}{5}=1.4$. השיעור המדוייק של $\sqrt{2}$ הוא: $1.41421...$ אמות.

1. השיעור המדוייק: $6.283...$.

למעשה, נפח חצי הכדור חייב להיות קטן מנפח הגליל החוסם (ראה ציור), שהוא כ-3 א"מ (ראה סימן קכט לעיל סעיף 3):



להערה 14 **3. מסקנת רבנו**

השמועה מפי רבו מדברת על שטח הכדור (כלומר שטח המעטפת של הכדור), ולא על נפחו. וראה לקמן בסימן קסד סעיף 2.

סימן קסד

להערה 9 **1. כמה מרובע יתר על העיגול - רביע**

הכלל ששטח עיגול שווה למכפלת מחצית היקפו במחצית קוטרו (πr^2) - נכון הוא (ראה סימן קכט סעיף 4). מסקנת הגמרא שמרובע יתר על העיגול רביע נובעת מהקירוב $\pi=3$, שאינו מדוייק. לפי קירוב זה, שטח עיגול שקוטרו 10 הוא 75, בעוד שלפי "החשבון האמיתי"[1] $\pi=3\frac{1}{7}$,[2] ולכן השטח הוא $\pi \cdot 5^2=3\frac{1}{7}\cdot 25=78\frac{4}{7}$.[3]

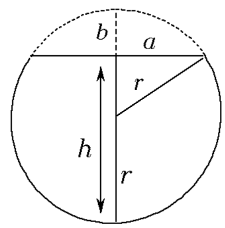
להערות 14 ו-17 **2. נפח מקוה בצורת חצי כדור**

שטח (המעטפת) של חצי כדור שווה למכפלת הקוטר בעומק (שהוא חצי הקוטר) כפול π: $\pi\cdot 2r\cdot r=2\pi r^2$.[4] נפח חצי כדור שווה למכפלת שטחו בשישית הקוטר: $2\pi r^2 \cdot \frac{2r}{6}=\frac{4\pi r^3}{6}$.[5] לפי זה, נפח כדור שלם שווה ל-$\frac{4\pi r^3}{3}$.

1. כאן טעה אנבלשום אפרים. כפי שאומר הרמב"ם בפירוש המשנה עירובין פרק א' משנה ה' (והוכח ע"י המתמטיקאי Lambert במאה הי"ח), לעולם אי אפשר להגיע לתכלית הדיוק בחשבונות אלו. וראה [10].
2. $3.1428...$. השיעור המדוייק: $3.14159...$.
3. $78.5714...$. השיעור המדוייק: $78.5398...$.
4. נוסחה זו מתאימה לנוסחה שקיבל רבנו מרבו (לעיל סימן קסג סעיף 3).
5. נוסחה זו מדוייקת.

3. מציאת הקוטר של כדור קטום להערה 20

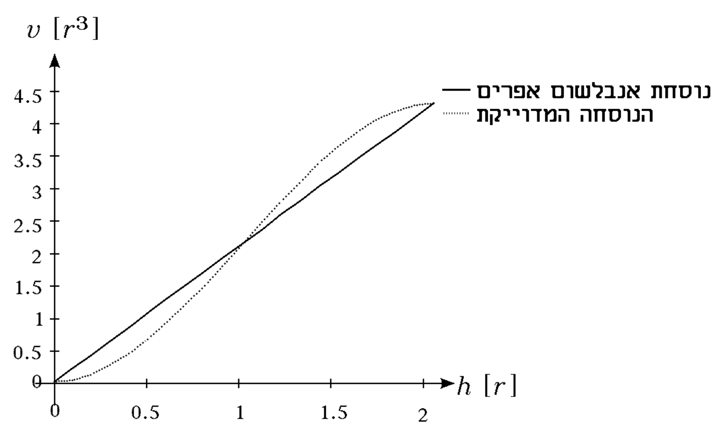
נתון מקוה בצורת כדור קטום, ואנו מעוניינים לדעת, מתוך עומקו h ורדיוס פתחו a, את קוטר הכדור.



שארית־הקוטר b שווה ל $\frac{a^2}{h}$ (הוכחה[6]: לפי משפט פיתגורס, $a^2+(h-r)^2=r^2$, לכן $a^2+h^2-2hr+r^2=r^2$, לכן $a^2=2hr-h^2$, ומכאן $\frac{a^2}{h}=2r-h=b$). לכן הקוטר שווה ל־ $b+h=\frac{a^2}{h}+h$.

4. מציאת השטח והנפח של כדור קטום להערה 22

שטח המקוה שווה למכפלת הקוטר ב־πh, כלומר ל $\pi h(\frac{a^2}{h}+h)=\pi(a^2+h^2)$.[7]
כדי לקבל את הנפח, יש לדברי אנבלשום אפרים לכפול את שטח המקוה בשישית הקוטר, כלומר הנוסחה לדעתו היא $\frac{d}{6}\cdot\pi hd=\frac{2r}{6}\cdot\pi h\cdot 2r=\frac{2\pi r^2 h}{3}$. נוסחה זאת אינה מדוייקת. הנוסחה הנכונה היא: $\pi h^2(r-\frac{h}{3})$.[8] (תמוהה, אם כן, הערתו "כל אלו הדרכים התבארו במופת בחכמת השיעורים אשר אין לפקפק עליהם").
נשווה את שתי הנוסחאות (h מציין את גובה המקוה ביחס ל־r, ו־v מציין את נפחו ביחס ל־r^3):



6. לא מובאת בסימן.

7. אכן, אפשר להוכיח ששטח כדור קטום בגובה h שווה ל $2\pi rh=\pi h\cdot 2r$, ואכמ"ל.

8. שתי הנוסחאות מתלכדות רק כאשר $h=0,r,2r$, כלומר בחצי כדור ובכדור שלם, וראה בהמשך. ייתכן שנוסחת אנבלשום אפרים התקבלה ע"י קירוב לינארי של נפח הכדור, מתוך ידיעת נפח כדור שלם וחצי כדור. שיטת הקירוב הלינארי יושמה כבר בכמה מקומות, ראה [3, סעיף ג], [8], וכן [4, עמ' 68].

אנו רואים, שאי הדיוק בנוסחת אנבלשום אפרים הוא לחומרא כאשר $h<r$, ולקולא כאשר $r<h$. אפשר להוכיח שעבור $r<h$, השגיאה היחסית המירבית היא $\frac{1}{9}$ (מתקבלת ב-$h=\frac{3}{2}r$), כלומר נפח המקוה יוצא קטן פי $\frac{8}{9}$ מהנפח המדוייק. עבור $h<r$, השגיאה היחסית הולכת וגדלה ככל ש-h קטן[9].

להערה 28 **5. הקשר בין תכונות הכדור והגליל החוסם**

בין נפח לנפח. לפי הנוסחאות שהבאנו, היחס בין נפח גליל החוסם כדור לנפח הכדור הוא $\frac{3}{2}$: נפח הגליל החוסם הוא $\pi r^2h=\pi r^2\cdot 2r=2\pi r^3$, ונפח הכדור הוא $\frac{4\pi r^3}{3}$. לכן היחס הוא: $2\pi r^3/\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{3}{2}$.

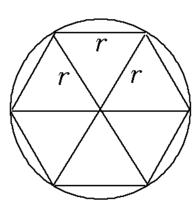
בין שטח לשטח. שטח גליל עם התושבות שלו (תחתיתו ומכסהו) שווה ל-$2\pi rh+2\pi r^2$. לכן היחס בין שטח גליל החוסם כדור עם תושבותיו לשטח הכדור שווה אף הוא ל-$(2\pi r\cdot 2r+2\pi r^2)/4\pi r^2=\frac{3}{2}$.

מהיחס הראשון אפשר להסיק את חסרון חצי הכדור מחצי הגליל החוסם: נפח חצי הגליל גדול פי $\frac{2}{3}$ מנפח חצי הכדור, ולכן הפרש הנפחים שווה למחצית נפח חצי הכדור.

סימן קסה

להערה 12 **1. הוכחה פשוטה ש-π גדול מ-3**

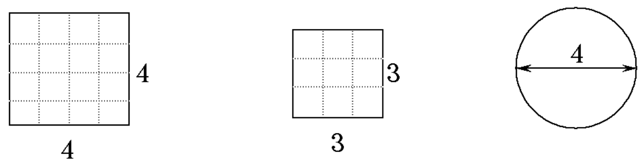
לכל מעגל, אם חוסמים משושה שווה צלעות בתוך המעגל, אזי היקף המשושה שווה בדיוק ל-$6r$ (כי כל צלע שלו שווה ל-r). לעומת זאת, ברור שהקשת שעליה נשענת כל צלע של המשושה גדולה מהצלע עצמה. שש הקשתות מהוות את היקף המעגל. לכן היקף המעגל גדול מ-$6r$, ולכן היחס בין היקף המעגל לקוטרו גדול מ-$6r/2r=3$.



9. השגיאה היחסית שואפת לאינסוף כאשר h שואף לאפס, ואכמ"ל.

להערה 20 ## 2. אין ללמוד מההיקף על השטח

א. נתבונן במקרים הבאים:



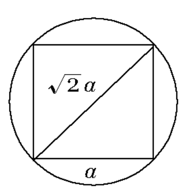
צורה 3 צורה 2 צורה 1

לצורה 1 ו־2 יש היקף זהה – 12 (לפי $\pi=3$). אילו השטח היה נקבע ע"י ההיקף בלבד, אזי שטחן היה שווה, וכיון ששטח צורה 2 הוא 9 – גם שטח העיגול היה $3\cdot3=9$. אבל שטח הריבוע החוסם את העיגול (צורה 3) הוא $4\cdot4=16$, ואם אכן שטח העיגול היה 9 – היה יוצא שהיחס בין שטח העיגול לשטח הריבוע החוסם הוא $\frac{9}{16}$, שהוא קטן בהרבה מ־$\frac{3}{4}$ וקרוב ל־$\frac{1}{2}$.

ב. נתבונן בשני המרובעים הבאים:

לשני המרובעים יש היקף זהה ($11+1+11+1=24=6+6+6+6$), אולם שטחיהם שונים: $11\cdot1=11\neq36=6\cdot6$. הסיבה: "שכל שיעור צד הזויות מתמעט". הכוונה כנראה, שכשמותחים את החוט המקיף ליצור את הזויות, מתמעט השטח שהחוט חוסם, וככל שמותחים אותו יותר, השטח שבפנים מתמעט. כיון שבעיגול אין זויות כלל – השטח הוא מקסימלי יחסית להיקף.

להערה 22 **ג.** נתבונן בריבוע החסום בתוך עיגול:

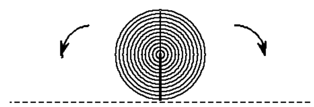


ברור ששטח העיגול גדול יותר, אולם ההיקפים כמעט זהים (היקף הריבוע הוא $4a$, והיקף העיגול הוא $\pi\cdot\sqrt{2}\,a\approx3\cdot1\frac{2}{5}a=\frac{21}{5}a$ [1]).

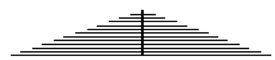
1. $4.2a$. ההיקף המדוייק: $4.44288...\cdot a$.

3. מציאת שטח העיגול על פי היקפו   להערה 24

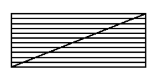
נתבונן על שטח העיגול כמורכב מהרבה מעגלים ("חוטים"):



נחתוך את הטבעות מלמעלה עד המרכז לאורך רדיוס העיגול, ונפרוש אותם כבציור לעיל. יתקבל המשולש הבא:



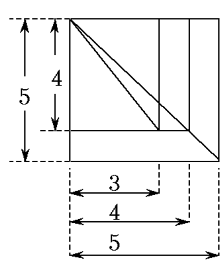
גובה המשולש שווה לרדיוס המעגל (r) ואורך בסיסו שווה להיקף המעגל החיצוני ($2\pi r$). כעת נפריד משולש זה לשני חלקים, ונסדר את החוט הקצר בצד הארוך, לפי הסדר, לקבל את הצורה הבאה:



אורך המלבן שווה למחצית בסיס המשולש ($2\pi r/2=\pi r$), ורוחבו שווה לגובה המשולש (r). לכן, שטח המלבן (ששווה לשטח העיגול) שווה למחצית ההיקף כפול מחצית הקוטר: $\pi r\cdot r=\pi r^2$.[2]

4. טענה שגויה נוספת   להערה 26

טענה. אלכסון מרובע 4×3 שווה לאלכסון מרובע 5×5.
טענה זו בלתי נכונה בעליל, שכן אפילו למרובע 4×4 יש אלכסון גדול יותר[3]:

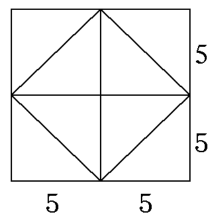


2. מקור ההוכחה הוא, כנראה, ב"חיבור המשיחה והתשבורת" לר' אברהם ב"ר חייא הנשיא, שנכתב במאה הי"ב, סעיף 95. לביסוס מתמטי של ההוכחה ראה [1, עמ' 120–126], [11], וכן [3, סעיף ב'].

3. הסיבה לכך היא משפט פיתגורס, ראה בהמשך (סעיף 6).

להערה 34 **5. הוכחה ש- $\sqrt{2} > 1\frac{2}{5}$**

א. נתבונן בציור הבא:



נניח ש- $\sqrt{2}=1\frac{2}{5}$. הצלע של כל אחד מארבעת הריבועים הקטנים שווה ל-5, ולכן אלכסוניהם שווים ל- $5\cdot1\frac{2}{5}=7$. הריבוע האלכסוני מורכב מאלכסוני הריבועים הקטנים (כלומר אורך צלעו הוא 7), ולכן אלכסונו שווה ל- $7\cdot1\frac{2}{5}=9\frac{4}{5}$. אבל אלכסון זה חייב להיות שווה לצלע הריבוע (שהיא 10), וזו סתירה.
כיון שקיבלנו אורך הקטן מ-10, אפשר להסיק ש- $\sqrt{2} > 1\frac{2}{5}$.

להערה 35 **ב. הוכחה נוספת**. שטח הריבוע הגדול בציור הנ"ל הוא $10\cdot10=100$. שטח הריבוע הפנימי יוצא $7\cdot7=49$. אבל הוא צריך להיות 50, כי הוא חצי משטח הריבוע הגדול (שטח כל משולש בו הוא חצי משטח הריבוע הקטן המתאים לו).

להערה 44 **6. הערת ר' שמשון משאנץ על המשנה בכלאים**

הכלל האומר שהאלכסון שווה למכפלת הצלע ב- $\sqrt{2}$ נכון רק בריבוע (שבו האורך שווה לרוחב). אולם אין הוא נכון במלבן. במלבן יש להשתמש במשפט פיתגורס כדי למצוא את אורך האלכסון.

משפט פיתגורס. אורך האלכסון d של מלבן $a\times b$ מקיים: $d^2=a^2+b^2$ (לכן, $d=\sqrt{a^2+b^2}$).

דוגמאות.

להערה 44 א. אורך האלכסון של מלבן 30×20 הוא $\sqrt{20^2+30^2}=\sqrt{1300}$, שהוא יותר מ-32 [4] (כי $32^2=1024<1300$).

להערה 45 ב. במלבן 4×6, אורך האלכסון הוא $\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$, שהוא יותר מ-7 [5] (כי $7^2=49<52$).

להערה 50 ג. במלבן 50×100, אורך האלכסון הוא $112 \approx \sqrt{12500}=\sqrt{100^2+50^2}$.[6]

להערה 52 ד. אורך האלכסון של מלבן $53\frac{3}{4}\times(93+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9})$ הוא $107\frac{1}{2} \approx \sqrt{(93\frac{1}{27})^2+(53\frac{3}{4})^2}$.[7]

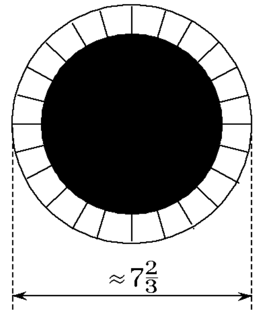
4. **השיעור המדוייק:** ...36.0555. **וצ"ע מדוע לא נקט** 36.

5. **השיעור המדוייק:** ...7.211.

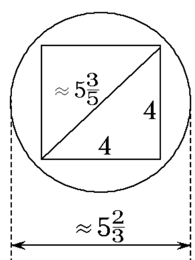
6. **השיעור המדוייק:** ...111.803.

7. **השיעור המדוייק:** ...107.4474.

לשיטת רבי, בסוכה ריבועית כשרה צריך לפחות 4×4 אמות. לפי זה, אומר רבי יוחנן שסוכה עגולה היא כשרה רק אם אפשר לישב בהיקפה 24 אנשים. לפי הסבר רב אסי לדברי ר' יוחנן, 24 האנשים יושבים סביב הסוכה מבחוץ (העיגול השחור מציין את הסוכה):



רבנו מראה, שר' יוחנן השתמש בשיעורים מדוייקים יותר עבור π ו-$\sqrt{2}$.[8] הוא בודק זאת עבור $\pi=3\frac{1}{7}$ ו-$\sqrt{2}$=מעט יותר מ-$1\frac{2}{5}$: כיון שכל איש תופס אמה, היקף העיגול החיצוני הוא 24 אמות, ולכן קוטרו הוא $\frac{24}{\pi}$ שהוא מעט פחות מ-$7\frac{2}{3}$.[9] רוחב הטבעת נקבע ע"י רוחב האנשים, שהוא אמה (ראה ציור בעמ' הקודם). לכן, כדי לקבל את קוטר הסוכה, יש להוריד אמה מכל צד. לפיכך, קוטר הסוכה הוא מעט פחות מ- $7\frac{2}{3}-2=5\frac{2}{3}$.



אלכסון הריבוע 4×4 שעל הסוכה העגולה להכיל הוא מעט יותר מ-$5\frac{3}{5}$ ($4\sqrt{2}$)[10], ואכן $5\frac{3}{5}<5\frac{2}{3}$ כדרוש, וההפרש בין "מעט יותר מ-$\frac{3}{5}$ ($=\frac{9}{15}$)" ל"מעט פחות מ-$\frac{2}{3}$ ($=\frac{10}{15}$)" הוא פחות מ-$\frac{1}{15}$.[11]

8. ר' צדוק הכהן מלובלין בספרו "תפארת צבי" על שו"ע יורה דעה (סימן ל') נוקט, שכל הפילפול ההנדסי של רבנו אינו "אלא להפיס דעתו של אותו חכם [אנבלשום אפרים] המהנדס ומתפלסף", וראה עוד בתשובה, הערה 36.

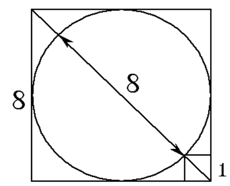
9. $7\frac{2}{3}=7.666...$. השיעור המדוייק: $7.639...$.

10. $5\frac{3}{5}=5.6$. השיעור המדוייק: $5.6568...$.

11. ההפרש המדוייק: $-0.017...$. אמנם זהו אי דיוק לקולא (כיון שההפרש שלילי), אבל הוא מזערי.

להערה 95 **8. עמוד המוטל לאויר**[12]

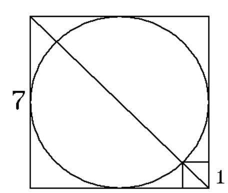
א. אוהל חוצץ בטומאה, אם יש בו חלל $1\times1\times1$ טפחים. במקרה של עמוד המונח על הארץ, אומרת המשנה שאם היקף העמוד הוא 24 טפחים, אזי יש מתחת דפנו $1\times1\times1$ טפחים.



חתך רוחב של העמוד

ביאור לפי קירובי התלמוד. היקף העיגול הוא 24 טפחים, ולכן קוטרו הוא 8 טפחים (בהנחה ש $\pi=3$). אלכסון הריבוע החוסם הוא $8\sqrt{2}\approx 8\cdot 1\frac{2}{5}=11\frac{1}{5}$,[13] לכן עודף האלכסון על רוחב העיגול מכל צד הוא $(11\frac{1}{5}-8)/2=\frac{8}{5}$. ובשביל ריבוע 1×1, $1\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$ טפחים מספיקים, ויש כאן אי דיוק (לחומרא) של $\frac{1}{5}$ טפח.[14]

להערה 118 **ב. 21 טפחים מספיקים**. אם היה בהיקף העיגול 21 טפחים, די בזה כדי לחסום ריבוע 1×1 כבציור:

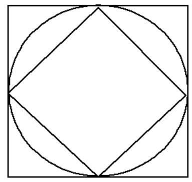


היקף העיגול הוא 21 טפחים, ומכאן שרוחבו הוא $21/\pi\approx 7$ (לפי $\pi=3$).[15] אלכסון הריבוע החוסם הוא $7\sqrt{2}\approx 7\cdot 1\frac{2}{5}=9\frac{4}{5}$,[16] לכן עודף האלכסון מכל צד הוא $(9\frac{4}{5}-7)/2=\frac{7}{5}\approx\sqrt{2}$,[17] שהוא אלכסון הריבוע הקטן (1×1).

12. לדיון מקיף בסוגיה זו ראה [5], וכן [8].
13. $11\frac{1}{5}=11.2$. השיעור המדוייק: 11.3137...
14. 0.2. השיעור המדוייק: 0.2426...
15. השיעור המדוייק: 6.6845...
16. השיעור המדוייק: 9.899...
17. השיעור המדוייק: 1.4497...

להערה 141 9. שטח ריבוע החסום בעיגול שווה לחצי שטח הריבוע החוסם עיגול

הדבר נראה לעיניים:



וכבר אמרנו לעיל (סעיף 5ב), ששטח הריבוע האלכסוני שווה למחצית שטח הריבוע הגדול.

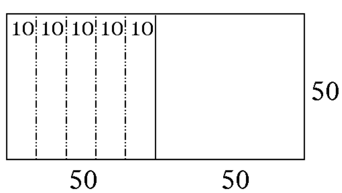
10. הגינה והקרפף

להערה 149 **א**. המשנה אומרת שבתנאים מסויימים, אפשר לטלטל בתוך גינה וקרפף בגודל 70 אמה ושיריים על 70 אמה ושיריים. שיעור זה נלמד מחצר המשכן (ראה סעיף 13).

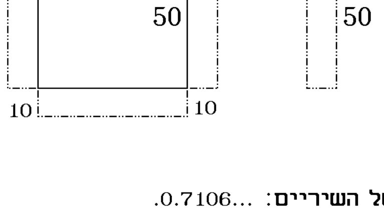
טענה. אורך האלכסון של ריבוע שמימדיו 50×50 הוא "70 אמה ושיריים".
הוכחה. לפי משפט פיתגורס (סעיף 6), $\sqrt{50^2+50^2}=\sqrt{5000}\approx70+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=70+$שיריים.[18]

להערה 156 **ב**. **תיקון הטענה**. אורך צלע הריבוע ששטחו שווה לשטח מלבן 100×50 הוא "70 אמה ושיריים".
הוכחה. נסמן את צלע הריבוע ב-a. אזי דרוש ש-$a^2=50\cdot100=5000$, ולכן $a=\sqrt{5000}=70+$שיריים. הסיבה שנזקקים ל"שיריים" היא, ש-$5000>4900=70^2$.

להערה 164 **ג**. ***שיטת רש"י לקירוב השיריים***. אפשר לקרב את ה"שיריים" בצורה הבאה: נחלק את המלבן לשני ריבועים שווים, ונחלק אחד מהם לחמש רצועות של 10 אמות:

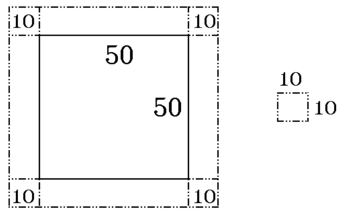


נשים אחת הרצועות מימין לריבוע הנותר, ונשאיר אחת משמאלו. וכן נשים אחת מלמעלה ואחת מלמטה:

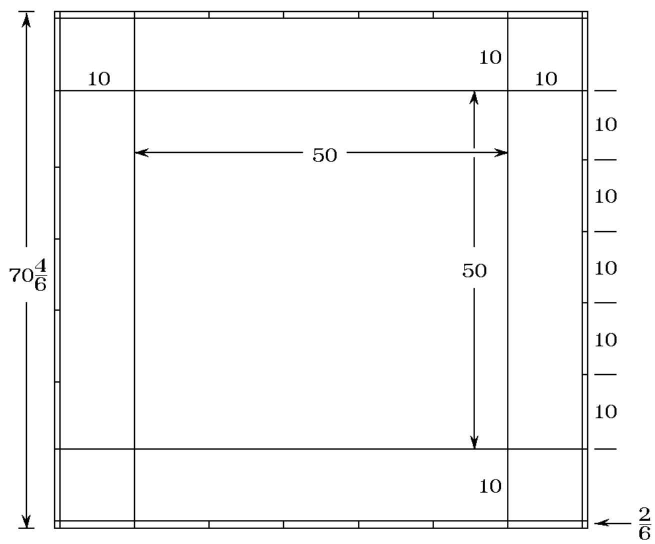


18. $1/2+1/5=0.7$. **ערך מדוייק של השיריים**: $0.7106...$.

נמלא את הפינות בעזרת 4 חתיכות 10×10 אמות מהרצועה הנותרת. נותרה לנו חתיכה אחת בגודל 10×10 אמות:



מהחתיכה הנותרת אפשר להוסיף מעט עובי ("שיריים") לאורך ולרוחב:
נקח את החתיכה של 10×10 אמות, שהיא 60×60 טפחים (לפי 6 טפחים באמה), ונחלקה ל־30 רצועות של 2×60 טפחים. נשים 7 רצועות כאלה בכל צד של הריבוע. מאחת משתי הרצועות שנותרו, ניקח 4 חתיכות 2×2 טפחים למלא את הפינות:



כעת, נותרו בידינו שתי רצועות: 2×60 ו־2×52 טפחים רבועים. התוספת לרוחב שאפשר להפיק משתי רצועות אלו תהיה פחות מ־$\frac{2}{3}$ אצבע (לפי 4 אצבעות בטפח): כיון שצריך להכין רצועה באורך $70\frac{4}{6}$ אמה לכל צד (ועוד משהו למלא את הפגימות), דרושה רצועה באורך מעט יותר מ־$4\cdot70\frac{4}{6}=282\frac{2}{3}$ אמות, שהם 1696 טפחים ומשהו. שטח הרצועות שבידינו הוא $2\cdot(52+60)=224$ טפחים רבועים, לכן עובי הרצועה הנוספת הוא מעט פחות מ־$\frac{224}{1696}=\frac{7}{53}$ טפחים, שהם $\frac{7}{53}\cdot4=\frac{28}{53}$ אצבעות[19] (לפי 4 אצבעות בטפח), שהם פחות מ־$\frac{2}{3}$.
תוספת הרוחב הכוללת היא מעט פחות מ־$2\cdot\frac{28}{53}=1\frac{3}{53}$.[20]

ד. טענת הירושלמי. $\sqrt{5000}\approx70\frac{2}{3}$.[21] טיב הקירוב: $(70\frac{2}{3})^2=4993\frac{7}{9}$ שהוא מתקרב ל־5000. להערה 168

19. ...0.5283 אצבעות.
20. $1\frac{3}{53}=1.0566...$. הגר"א על הדף מציין שמספר זה קרוב ל־$1\frac{1}{18}$ $(=1.0555...)$. לפי שורש מדוייק, התוספת היא ...1.05627 אצבעות, כלומר התוצאה מקורבת מאד.
21. ...70.666. השווה להערה 18.

קירוב יותר מדוייק. $\sqrt{5000}\approx 70\frac{5}{7}$.[22] טיב הקירוב: $(70\frac{5}{7})^2\approx 5000\frac{1}{2}$.[23]

11. בית רובע הקב

להערה 173 **א.** רובע הקב = $\frac{1}{4}$ קב. סאה = 6 קבים. לכן, בית סאתיים = 2 סאים = 12 קבים = 48 רבעי קב.

טענת הירושלמי. רובע הקב = $10\frac{1}{2}\times 10\frac{1}{2}$ אמות.

לפי זה, בית סאתיים = $48\cdot 10\frac{1}{2}\cdot 10\frac{1}{2}$ = 5292 רבעי קב. וצריך להיות 5000, אבל זהו קירוב בלבד.

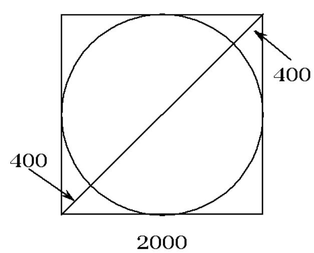
להערה 175 **ב. טענת הרמב"ם.** רובע הקב = $10\frac{1}{5}\times 10\frac{1}{5}$ בקירוב.

טענה זו יותר מדוייקת: $48\cdot 10\frac{1}{5}\cdot 10\frac{1}{5}=4993.92$, שהוא קרוב יותר ל-5000.[24]

12. המרבע את העיר

להערה 182 **א.** הגמרא עוסקת במציאת תחום השבת של עיר עגולה בקוטר 2000 אמה. לשם כך, יש לחסום את העיר בריבוע, ואז להוסיף 2000 אמה לכל צד.

קוטר העיגול הוא 2000 אמות, והוא שווה לצלע הריבוע החוסם. לכן, אלכסון הריבוע שווה ל-$2000\sqrt{2}\approx 2000\cdot 1\frac{2}{5}=2800$ אמות[25], והוא עודף 800 אמות על קוטר העיגול, שהן 400 אמות מכל צד:



לפי $\sqrt{2}$ מדוייק, העודף מכל צד הוא מעט יותר מ-400 אמות[26].

להערה 185 **ב.** כעת נניח ריבוע 2000×2000 על פינת הריבוע שלנו. כיון שעודף האלכסון על הצלע הוא 800 בקירוב (כמו קודם), בסך הכל עודף האלכסון AB על AC הוא $800+400=1200$ בקירוב[27].

22. ...70.714. השווה להערה 18.

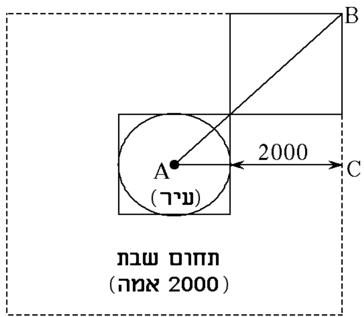
23. התוצאה המדוייקת: ...5000.5102. אי אפשר להגיע לתכלית הדיוק בחישוב $\sqrt{5000}$. העובדה ש-$\sqrt{2}$ (ולכן גם $\sqrt{5000}=50\sqrt{2}$) אינו רציונאלי מופיעה כבר בכתבי אריסטו. גם הרמב"ם בפירושו על המשנה מעיר שאין אפשרות לחשב את $\sqrt{5000}$ בדיוק מושלם.

24. השיעור המדוייק: ...10.206.

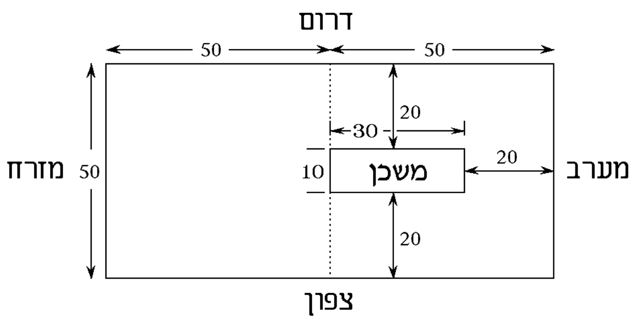
25. השיעור המדוייק: ...2828.427.

26. השיעור המדוייק: ...414.213.

27. השיעור המדוייק: ...1242.64.



להערה 192 **13. מיקום המשכן בתוך חצר המשכן**



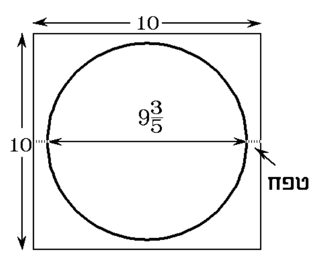
חצר המשכן

לפני המשכן ישנה רחבה של 50×50 אמות, וזאת כוונת הפסוק "ורוחב חמישים בחמישים".

14. שיטת אנבלשום אפרים בים שעשה שלמה

להערה 211 **א.** בסימן קכט סעיף 2 תיארנו את מבנה הים שעשה שלמה על פי הסבר הגמרא. בסעיף זה נתאר את נסיונו של אנבלשום אפרים ליישב את המתמטיקה עם הפסוקים, על ידי הקטנת קוטר החלק העגול של הים[28].

לשיטתו, החלק העגול של הים צר יותר (בטפח [גדול] מכל צד) מהחלק הריבועי:



מבט מלמעלה

28. אנבלשום אפרים אימץ כנראה את שיטת ראב"ח ב"חיבור המשיחה והתשבורת" (סוף שער רביעי), וראה בתשובה בסוף הערה 58. גם מהרי"ט ניסה לילך בשיטה זו, ולא מצא הסבר מספק (ראה [5, עמ' **146**]).

אם נניח שישנם 5 טפחים באמה, קוטר העיגול הוא $10-\frac{2}{5}=9\frac{3}{5}$ אמות, ולכן היקפו הוא $\pi\cdot9\frac35\approx3\frac17\cdot9\frac35=30\frac{6}{35}\approx30\frac16$.[29]
בנוסף, לשפת העיגול יש עובי מסויים. נמצא את עובי השפה שעבורו ההיקף (הפנימי) הוא 30 אמה. נניח שעובי השפה הוא a. אזי דרוש $\pi\cdot(9\frac35-2a)=30$. לפי $\pi=3\frac17$, נקבל $a=\frac{3}{110}$ אמות, שהם $\frac{3}{110}\cdot6=\frac{9}{55}$ טפחים (לפי 6 טפחים באמה[30]), שהם $\frac{9}{55}\cdot4=\frac{36}{55}\approx\frac23$ אצבע[31] (לפי 4 אצבעות בטפח).

להערה 212 **ב**. שטח העיגול הפנימי שווה למכפלת מחצית ההיקף במחצית הקוטר: $\frac{30}{2}\cdot\frac{9\frac35-2\cdot\frac{3}{110}}{2}=72-\frac{9}{22}$.[32] לאנבלשום אפרים יצאה כאן התוצאה $72\frac29$.

הערה. כאן נפלה כנראה שגגה בחישוביו שבסימן, שמשפיעה גם על החישובים בהמשך[33]. ייתכנו שני הסברים עיקריים לשגיאה זאת:
1. אנבלשום אפרים החליף בטעות את הביטוי "פחות תשע מעשרים ושתים" ב"ושתי תשיעיות".
2. לפי הבנת רבנו המובאת בהמשך הסימן, אנבלשום אפרים התעלם מעובי השפה בחישובו, וקיבל $\frac{30\frac16}{2}\cdot\frac{9\frac35}{2}=72\frac25$, ואז ה-$\frac25$ התחלף ב-$\frac29$.

להערה 215 **ג**. לפי זה, נפח החלק הגלילי של הים הוא $72\frac29\cdot2=144\frac49$ א"מ, ולכן נפח הים הוא $300+144\frac49=444\frac49$ א"מ, שהן צריכות להיות 2000 בת, לכן כל א"מ שווה ל-$2000/444\frac49=4\frac12$ בת[34].

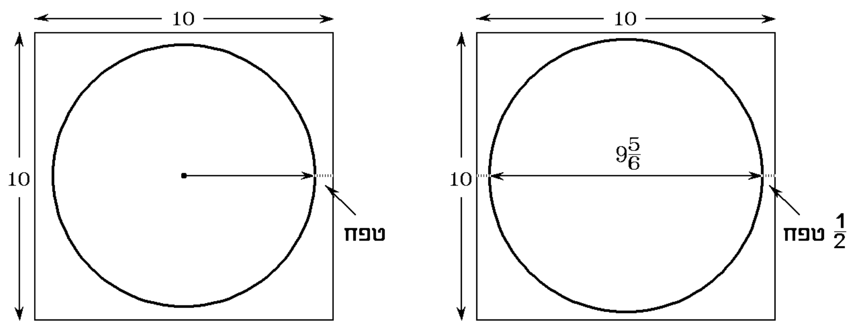
הים שעשה שלמה מכיל 150 מקוואות, שהם 6000 סאה, ולכן נפח מקוה הוא 40 סאה.

מסקנה. נפח מקוה שבסיסו ריבוע 1×1 אמות וגובהו $3-\frac{1}{27}$ אמות הוא 40 סאה.
הוכחה. בת שווה ל-3 סאים, לכן א"מ שווה ל-$4\frac12\cdot3=13\frac12$ סאים, לכן מקוה $1\times1\times3$ אמות מכיל $3\cdot13\frac12=40\frac12$ סאים, ויש לחסר מזה $\frac12$ סאה (כדי שהנפח יהיה 40 סאה), לכן יש לחסר מהגובה $\frac12/13\frac12=\frac{1}{27}$ אמות.

להערה 219 **ד**. ***לא ייתכן שחז"ל לא התחשבו בעובי***. אם קוטר החלק הגלילי הוא 10 אמות, אזי שטח העיגול הוא $\frac{\pi}{4}\cdot10^2\approx78\frac47$,[35] ולכן נפח הגליל הוא $78\frac47\cdot2=157\frac17$ שהוא יותר מה-150 שאמרו בגמרא.

29. השיעור המדוייק: ...30.159 אמות.
30. שים לב שיש כאן שינוי מ-5 טפחים ל-6 (וכמו שמעיר רבנו בהמשך).
31. העובי המדוייק של השפה הוא: ...0.6084 אצבעות.
32. ...71.5909. השיעור המדוייק: ...71.6197.
33. אנבלשום אפרים נמשך כנראה אחר חשבונותיו של ראב"ח (לעיל הערה 28), וגם טעות זו מקורה שם. ואכמ"ל, ובעז"ה עוד נרחיב בענין זה במקום אחר.
34. 4.5 בת. לפי החישוב המדוייק, אם לא נכלול את עובי השפה בנפח, א"מ=...4.5122 בת.
35. ...78.5714. השיעור המדוייק: ...78.5398.

להערה 221 **ה. הסבר הגמרא**. לחז"ל היה ספק אם המיעוט של טפח הוא בקוטר או ברדיוס של העיגול:



מיעוט טפח בקוטר

מיעוט טפח ברדיוס

לפי 6 טפחים באמה, נקבל במקרה הראשון שטח של $\frac{\pi}{4}(10-\frac{1}{6})^2\approx 76$ אמות רבועות[36], ובמקרה השני שטח של $\frac{\pi}{4}(10-\frac{2}{6})^2\approx 73$ אמות רבועות[37]. כיון שיש ספק, לקחו חז"ל ערך שביניהם: 75 אמות רבועות.

15. החלק המתמטי בדחיית רבנו

להערה 236 **א. כמה טפחים יש באמה**. כדי להניח בצורה עקבית שבאמה יש 6 טפחים, צריך לתקן את החישובים. אם מכל צד נוריד טפח אחד, יהיה קוטר העיגול $10-2\cdot\frac{1}{6}=9\frac{2}{3}$, ולכן ההיקף הוא $\pi\cdot 9\frac{2}{3}\approx 30\frac{8}{21}\approx 30\frac{1}{3}$ אמות[38]. נמצא את עובי השפה כדי שהיקף העיגול הפנימי יהיה 30. דרוש $\pi\cdot(9\frac{2}{3}-2a)=30$. לפי $\pi=3\frac{1}{7}$, נקבל $a=\frac{2}{33}$ אמות, שהם $\frac{2}{33}\cdot 6=\frac{4}{11}$ טפחים, שהם $\frac{4}{11}\cdot 4=1\frac{5}{11}\approx 1\frac{1}{3}$ אצבע[39].

להערה 240 **ב. דבר הנמדד ודבר המחזיק אותו**. לכאורה יש מספר אפשרויות בהסבר ההבדל שבין שיעור דבר הנמדד לבין שיעור דבר המחזיק אותו. העיקריות שבהן:

1. "הדבר המחזיק" הוא הכלי כולל הדפנות, ו"דבר הנמדד" הוא נפח הכלי (ללא הדפנות)[40]. הבעיה באפשרות זו היא, שעובי הדופן אינו מוגדר, ולכן שיעור "הדבר המחזיק" אינו מלמד על שיעור "הדבר הנמדד".

2. חז"ל שיערו את המקוה לפי האורך, הרוחב והגובה של אדם בינוני, כדי שיוכל לטבול במקוה, ולא לפי הנפח. לפי זה, "שיעור דבר המחזיק" פירושו צורת הכלי: רוחבו, אורכו וגובהו, ואילו "שיעור דבר הנמדד" הוא נפח הכלי. וכן מסתבר, שכן ייתכן מקוה שנפחו גדול מאד, ועדיין אי אפשר לטבול בו (כגון מקוה שטוח במיוחד או צר במיוחד)[41].

36. השיעור המדוייק: ...75.9436.

37. השיעור המדוייק: ...73.391. חשבון ראב"ח שם עולה ל- $73\frac{1}{2}$ אמות בקירוב.

38. השיעור המדוייק: ...30.3687 אמות.

39. $1\frac{5}{11}=1.4545...$. $1\frac{1}{3}=1.3333...$. השיעור המדוייק: ...1.4084.

40. ראה מעין זה במקור [4, עמ' 63].

41. כן היא שיטת הרשב"א בתשובותיו (חלק ג' סימן רכד), וראה [1, הערה 51], וכן בתשובה קכט הערה 27.

להערה 241 ג. **מימדי מקוה כשר**. מימדי מקוה כשר הם לעולם $1\times1\times3$ אמות. ומה שראינו, ששטח העיגול (אם מורידים טפח מכל צד) יוצא קטן מדי אם נניח שמקוה שווה ל־40 סאה, מוכיח שמקוה מכיל יותר מ־40 סאה[42].

להערה 249 ד. **ארבעים סאה מכוונות**. מקוה של 3 א״מ שוחקות אכן מכיל 40 סאה, אולם אמות הגובה של הים שעשה שלמה הן עצבות (יותר קטנות). לפי הפשט הפשוט (שלא מורידים טפח מקוטר המעגל) קיבלנו שנפח הגליל הוא $157\frac{1}{7}$ א״מ, ואנו טוענים ש־$157\frac{1}{7}$ א״מ עצבות שוות ל־150 א״מ שוחקות[43].

להערה 253 ה. **החישוב הלא מדוייק**. אם קוטר החלק העגול הוא $9\frac{5}{6}$, אזי היקפו לפי $\pi=3\frac{1}{7}$ הוא $\pi\cdot9\frac{5}{6}\approx30\frac{19}{21}>30$.[44]

סימן קסו

להערה 12 1. **נפח כדור לפי** $\pi=3$

טענה. לפי $\pi=3$, נפח חצי כדור שווה למחצית נפח התיבה החוסמת את חצי הכדור.
הוכחה. נסמן את נפח מחצית הכדור ב־v. כפי שנאמר בסימן קסד סעיף 5, נפח הגליל החוסם שווה ל־$\frac{3}{2}v$. לפי הכללים שבסימן קכט, נפח התיבה הוא $\frac{4}{\pi}\cdot\frac{3}{2}v=\frac{6}{\pi}v\approx2v$.[1] לכן יחס הנפחים הוא $\frac{v}{2v}=\frac{1}{2}$.[2]

דוגמאות.
א. אם נפח חצי הכדור הוא 20, אזי נפח הגליל החוסם הוא $\frac{3}{2}\cdot20=30$, ונפח התיבה החוסמת הוא $\frac{4}{3}\cdot30=40$,[3] שהם $2\cdot20$.
ב. אם קוטר הכדור הוא 6, אזי לפי הכללים שבסימן קסד סעיף 4, שטחו הוא $\pi6^2\approx3\cdot36=108$.[4] כדי לקבל את נפח הכדור יש לכפול את התוצאה בשישית הקוטר,

42. למשל, לפי 5 טפחים באמה, אם נתעלם מעובי השפה נקבל ששטח העיגול הוא $\frac{\pi}{4}(10-2\cdot\frac{1}{6})^2=73.391...$, ולכן נפח הים הוא $300+2\cdot73.391...=446.78219...$ א״מ. כיון שזה שווה ל־6000 סאה, נפח מקוה שווה ל־$3\cdot6000/446.782...=40.288...$ סאה.

43. אפשר להסביר זאת בשתי דרכים: האחת, שכל מידות הים (אורכו, רוחבו וגובהו) נמדדו באמות עצבות, והשניה, שרק גובה הים נמדד באמות עצבות, ויתר המידות (אורך ורוחב) נמדדו באמות שוחקות (וכן מסתבר מפשט דברי רבנו). לפי השיטה הראשונה, אמה שוחקת גדולה פי $\sqrt[3]{157\frac{1}{7}/150}=1.0156...$ מאמה עצבה. לפי השיטה השניה, אמה שוחקת גדולה פי $157\frac{1}{7}/150=1\frac{1}{21}=1.0476...$ מאמה עצבה. היחס האחרון מתאים לשיטת הריעב״ץ (ראה ״מדות ומשקלות של תורה״ עמ׳ ריג, וכן הערה 29 שם), והיחס הראשון קרוב לשיטת הרשב״א (עיין שם עמ׳ רט ואילך).

44. $30\frac{19}{21}=30.90476...$. השיעור המדוייק: $30.892...$.

1. השיעור המדוייק: $1.9098...$.

2. היחס המדוייק: $0.523...$.

3. השיעור המדוייק: $38.197...$.

4. ראה שיעור מדוייק בסעיף הבא.

כלומר ב־1. לכן הנפח הוא 108, ונפח מחציתו הוא 54. נשווה זאת לחישוב שלנו: נפח התיבה החוסמת את מחצית הכדור הוא $6\cdot6\cdot3=108$, ולכן נפח מחצית הכדור הוא $108/2=54$.

2. נפח כדור וחצי כדור לפי $\pi=3\frac{1}{7}$ להערה 13

נמצא את התוצאה של דוגמא ב׳ לעיל לפי $\pi=3\frac{1}{7}$. $\pi 6^2\approx 3\frac{1}{7}\cdot36=113\frac{1}{7}$.[5] לכן התוספת על הערך הקודם היא $113\frac{1}{7}-108=5\frac{1}{7}$, והתוספת היחסית היא $5\frac{1}{7}/108=\frac{1}{21}$.

מסקנה. לפי $\pi=3\frac{1}{7}$, אם נפח התיבה החוסמת הוא v, אזי נפח הכדור הוא $(1+\frac{1}{21})\frac{1}{2}v=\frac{11}{21}v$ (כלומר יש להוסיף $\frac{1}{21}$ על התוצאה שהתקבלה בטענה הנ״ל).

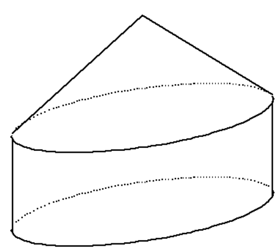
הוכחה. אם הקוטר הוא d, אזי נפח התיבה הוא d^3, ונפח הכדור הוא $\frac{d}{6}\cdot\pi d^2=\frac{\pi d^3}{6}$, לכן היחס הוא $\frac{\pi}{6}\approx3\frac{1}{7}/6=\frac{11}{21}$.

דוגמא. אם רוחב הכדור הוא $\frac{16}{7}$ אמה[6], אזי נפח התיבה החוסמת הוא $(\frac{16}{7})^3=\frac{4096}{343}$ ונפח הכדור כולו הוא $\frac{\pi}{6}\cdot\frac{4096}{343}\approx\frac{45056}{7203}$.[7] נפח חצי הכדור המבוקש הוא $\frac{22528}{7203}$ שהוא מעט יותר מ־3 א״מ שהן נפח מקוה[8]. להערה 14*

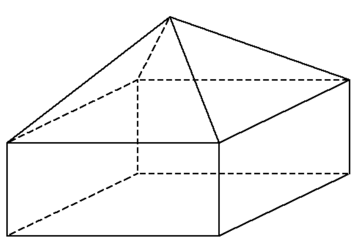
סימן קעב*

1. תוספת גודש להערה 5

הנחה. אם מעמיסים כלי בחומר מוצק[1] עד שהוא גדוש, אזי הגודש הוא צורה מחודדת שגובהה שווה בקירוב למחצית רוחבה.



כלי עגול ועליו חרוט הגודש



תיבה ועליה פירמידת הגודש

5. ...113.1428. השיעור המדוייק: ...113.0973.

6. בתשובה לפנינו נכתב בטעות $1\frac{6}{7}$ (ראה שם הערה 14), שיעור שהוא קטן מדי.

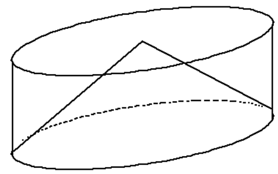
7. לפי $\pi=3\frac{1}{7}$.

8. הערך העשרוני: ...3.127. לפי π המדוייק נקבל: ...3.1263.

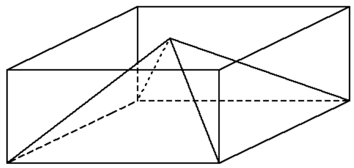
* תודתנו לנחום וישנה נ״י על הערותיו לסימן זה.

1. אבקה, קמח, זרעים וכדומה.

משפט. נפח חרוט החסום בגליל שווה לשליש נפח הגליל. והוא הדין לפירמידה החסומה בתיבה.

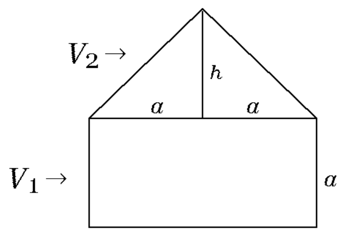


חרוט בתוך גליל



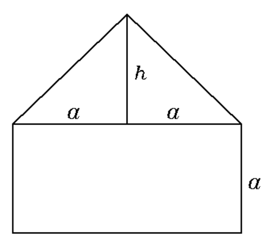
פירמידה בתוך תיבה

מסקנות. נתבונן בגודש הנמצא על כלי שרוחבו כפול מגובהו, ונסמן את נפח הכלי ב־V_1, ואת נפח הגודש ב־V_2:

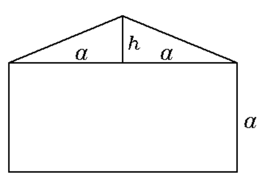


חתך רוחב

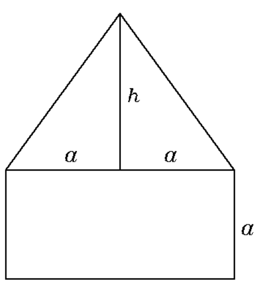
א. אם $h=a$, אזי $V_2=\frac{1}{3}V_1$, ולכן:
ב. אם $h<a$, אזי $V_2<\frac{1}{3}V_1$,
ג. אם $h>a$, אזי $V_2>\frac{1}{3}V_1$.



מקרה א׳



מקרה ב׳



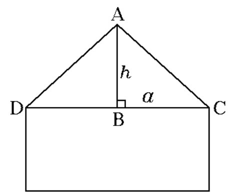
מקרה ג׳

הוכחה. במקרה א׳, נפח הכלי שווה לנפח התיבה (אם הוא גלילי – לנפח הגליל) החוסמת את הגודש, והמסקנה נובעת מהמשפט דלעיל. מקרים ב׳ וג׳ נובעים מא׳, כיון שבמקרה ב׳ גובה הגודש קטן יותר, ובמקרה ג׳ גובהו גדול יותר.

2. זוית הגודש

להערה 6

משפט. במקרה א׳, הזוית הראשית של הגודש היא ישרה.
הוכחה. נצייר חתך רוחב של הכלי עם הגודש:



כיון ש-$h=a$ (כלומר המשולש ABC הוא שווה שוקיים), מתקיים $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ACB$. אבל $\sphericalangle ABC=90^o$, לכן $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ACB=45^o$. משיקולי סימטריה, גם $\sphericalangle DAB=45^o$, ולכן זוית הראש שווה ל-$\sphericalangle BAC+\sphericalangle DAB=90^o$.

להערה 7   3. שיטת חז″ל בדברי הימים

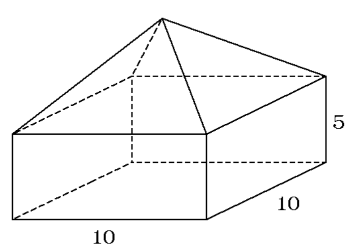
לפי תירוץ חז″ל על הפסוק בדברי הימים, הגודש בים שעשה שלמה שווה למחצית נפח הים.

בעיה א. צורת הים אינה אחידה (חלקו תיבה וחלקו גליל), ולכן קשה לומר שנפח הגודש שווה לשליש נפח הים: כיון ששטח החלק העליון (עיגול) קטן יותר משטח החלק התחתון (ריבוע), הגודש יוצא פחות משליש נפח הים[2].

בעיה ב. אפילו נאמר שנפח הגודש שווה לשליש נפח הים, עדיין לא נגיע ל-3000 בת: $2000+\frac{1}{3}\cdot 2000=2666\frac{2}{3}$.[3]

להערה 9   4. תירוץ אנבלשום אפרים

הפסוק בדברי הימים מדבר על ים שכולו מרובע[4], יחד עם הגודש.



2. חישוב מדוייק: לפי משפט שבתחילת סעיף 1, נפח הגודש הוא $\frac{1}{3}\pi 5^2\cdot 5=130.899...$ א″מ. בסימן קכט סעיף 3, ראינו שהנפח המדוייק של הים הוא $457.079...$. לכן, יחס הנפחים הוא $130.899.../457.079...=0.286...$.

3. מדברי הרמב″ם ב″מורה נבוכים″ (חלק א׳ פרק לו) עולה, שהיו שטעו לחשוב שנפח החרוט שווה למחצית נפח הגליל (ולא לשלישו). רבנו מראה בהמשך שחז″ל לא היו בין הטועים בזה.

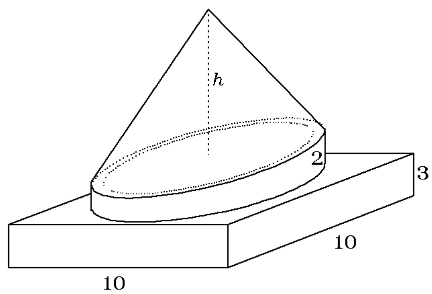
4. ב″קדמוניות היהודים″ ליוסף בן מתתיהו (ספר ח׳, סעיפים 79–80) מוצע שהים היה בצורת חצי כדור. לפי זה מובנים דברי חז″ל שנפח הגודש שווה למחצית נפח הים: כיון שגובה הגודש הוא $h=r$, $(\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h)/(\frac{2}{3}\pi r^3)=\frac{1}{2}$ (וראה ″מדות ומשקלות של תורה″ עמ׳ רמג–רמד, ולעיל בנספח זה, סימן קכט הערה 2). אך מלבד זה ששיטת יוסף בן מתתיהו נסתרת ע″י הגמרא, עיין מה שדחינו אותה ע″פ פשט הכתוב [1, הערה 53], ועיין עוד בפירוש רש″י על מל″א פרק ז׳.

נפח הים הוא $5\cdot10\cdot10=500$ א״מ, ונפח הגודש הוא $\frac{1}{3}\cdot500=166\frac{2}{3}$ – בסה״כ $666\frac{2}{3}$. אם נאמר שכל א״מ שווה ל־$4\frac{1}{2}$ בתים[5] נקבל $666\frac{2}{3}\cdot4\frac{1}{2}=3000$ בתים בדיוק.

להערה 14 5. תשובת רבנו לגבי גובה הגודש

טענה. אם גובה הגודש קטן ממחצית רוחבו, אזי זוית הראש שלו כהה. אם גובה הגודש גדול ממחצית רוחבו, אזי זוית הראש שלו חדה[6].
הטענה נובעת מהמשפט שבסוף סעיף 1 לעיל (ראה ציורים שם).

הערה. הגודש יושב על החלק העליון של הים, כולל הדפנות.



נמצא את גובה הגודש שעבורו נפח הגודש שווה למחצית נפח הים[7]. קוטר העיגול הפנימי הוא 10 אמות, ולכן הקוטר החיצוני הוא $10+2\cdot\frac{1}{5}$ (לפי 5 טפחים באמה). נסמן את גובה הגודש ב־h. נפח הגליל החוסם את הגודש הוא $\frac{\pi}{4}\cdot(10\frac{2}{5})^2\cdot h$, ונפח הגודש הוא $\frac{1}{3}$ מזה. נפח הים הוא $3\cdot10^2+2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot10^2$ ואנו דורשים שנפח הגודש הוא חצי מזה, כלומר $\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(10\frac{2}{5})^2\cdot h=\frac{1}{2}(3\cdot10^2+2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot10^2)$. מזה מקבלים $h=8.07098\ldots$ אמות.

להערה 38 6. תירוץ רבנו על דרך הפשט

בתקופת הנביאים האחרונים, קטנו מידות הנפח פי $\frac{2}{3}$ (משום עיוות המידות). לכן, מה שאמרו בדברי הימים "3000 בת" הוא באמת $\frac{2}{3}\cdot3000=2000$ בת.

להערה 49 7. ספינה אלכסנדרית

בתוך ספינה אלכסנדרית היה בור ששימש לאגירת מים מתוקים[8]. החלל של הבור מכיל 40 סאה בלח (כלומר בלי הגודש), ו־60 סאה ביבש (עם הגודש). כדי לישב זאת

5. ראה לעיל סימן קסה, סעיף 14.

6. הניסוח המדוייק המובא כאן נרמז בדברי רבנו "שאם הדברים הנמדדים הם גשמים קטנים כדורים חלקלקים – תהיה זוית המחודד נרחבת. ואם הגשמים גסים בעלי זויות דבקיים – תהיה הזוית חדה".

7. חישוב זה לא מופיע בתשובה. לדיון נוסף על צורת הגודש עיין ריטב״א ומהרש״א על עירובין יד ע״ב.

8. ע״פ רש״י (עירובין יד ע״ב, ד״ה ובור ספינה אלכסנדרית).

גאומטרית, יש לומר שרוחב הבור היה יותר מכפליים עומקו, ולכן הגודש שווה למחצית נפח הבור.

אם נאמר שרוחב הבור שווה לכפליים עומקו, אזי קשה לשיטת אנבלשום אפרים בים שעשה שלמה, כיון שבמקרה זה נפח הגודש שווה לשליש נפח הכלי[9], ואילו בבור ספינה אלכסנדרית דרוש שנפח הגודש שווה למחצית נפח הכלי[10].

9. שליש מלגו.

10. שליש מלבר. אולם מפשטות דברי רש״י בשבת לה ע״א נראה שצורת בור ספינה אלכסנדרית היא חצי כדור, ואז אין כאן קושיה. אולם דבריו צ״ע, שכן לפי פשט זה גם צורת הים שעשה שלמה היא חצי כדור, בניגוד לשיטתו במקומות אחרים (עירובין יד ע״ב; ובפירושו על מל״א פרק ז׳), וראה לעיל הערה 4.

רשימת מאמרים

לקמן מובאת רשימת מאמרים (של כותבי נספח זה) לעיון נוסף. המאמרים מסודרים בסדר ענייני.

1. **כל שיש בהיקפו**, הגיון חוברת ג׳, תשרי תשנ״ו, 103–131.
2. **סוכה עגולה**, מגל חוברת י׳, תשנ״ד, 117–134.
3. **סוכה עגולה(ב)**, מגל חוברת י״א, תשנ״ה, 127–134.
4. **כוורת**, המעין ל״ה(ג), ניסן תשנ״ה, 57–69.
5. **עמוד שהוא מוטל לאויר** (בהנחיית הרב שמעון וייזר), מגל חוברת י״א, 135–155.
6. **חלון עגול**, טרם נדפס.
7. **על היחס שבין היקף עיגול לקוטרו**, סיני, כרך קי״ז, כסלו–טבת תשנ״ו, קפ״ו–קצ״א.
8. **שיטת הרבנים סתהון לחישוב שורשים** (עם יאיר הלוי), מקרומתמטיקה (בדפוס).
9. **סוגיות גאומטריות בספרות חז״ל**, הגיון חוברת ד׳, תשנ״ז, 4–17.

אנגלית:

10. **On the Rabbinical Approximation of** π (הקירוב הרבני ל-π), Historia Mathematica, February 1998.

11. **The Proof of Rabbi Abraham Bar Hiya Hanasi** (הוכחת רבי אברהם ב״ר חייא הנשיא) (with Victor J. Katz), in preparation.